

Automatyka i Regulacja Automatyczna

Podstawy Automatyki

Teoria i Technika sterowania

Materiały pomocnicze do ćwiczeń rachunkowych i laboratorium

Część 1

dr inż. Dariusz Kuś

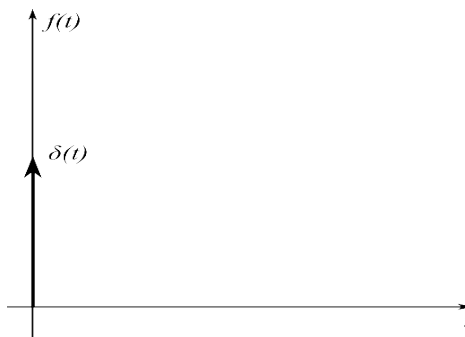
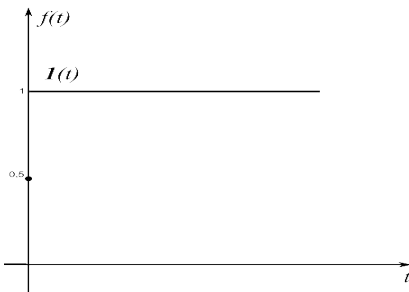
Katedra Automatyki i Metrologii
Wydział Elektrotechniki i Informatyki
Politechniki Lubelskiej
Lublin 2023

Spis treści

1. Transformacja Laplace'a (prosta).....	3
2. Transformacja Laplace'a odwrotna.....	7
3. Modelowanie przy pomocy transmitancji operatorowej.....	11
4. Wyznaczanie odpowiedzi obiektu na zadane wymuszenie.....	16
5. Modelowanie przy pomocy zmiennych stanu.....	19
6. Przekształcanie schematów blokowych.....	27
7. Charakterystyki częstotliwościowe.....	36
8. Stabilność.....	43
9. Stabilność – kryterium Hurwitza.....	47
10. Stabilność – kryterium Nyquista.....	55
11. Kryterium Nyquista Logarytmiczne.....	62
12. Zapas stabilności.....	66
13. Układ automatycznej regulacji.....	72
14. Dokładność statyczna.....	78
15. Jakość regulacji.....	82
Literatura.....	95

1. Transformacja Laplace'a (prosta)

1. Pseudofunkcje



$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t \neq 0 \end{cases}$$

2. Definicja

Niech dana będzie funkcja w dziedzinie czasu $f(t)$ zwana „oryginałem” taka, że

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ \text{określona} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$|f(t)| \leq A e^{\sigma t} \quad \text{dla } A > 0 \text{ i } \sigma \geq 0 \quad (1.2)$$

oraz spełnia warunki Dirichleta tzn. ma skończoną liczbę punktów nieciągłości, w każdym z tych punktów istnieje granica lewo i prawo-stronna, a za wartość funkcji przyjmuje się średnią tych granic wówczas funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie zmiennej zespolonej $s = \sigma + j\omega$ taka, dana wzorem

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.3)$$

nazywana jest „transformatą Laplace'a” a operacja powyższa „transformacją Laplace'a”.

3. Własności

Jeśli

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad \text{i} \quad L\{g(t)\} = G(s) \quad (1.4)$$

to zachodzą twierdzenia

o addytywności $L\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s) \quad (1.5)$

o jednorodności $L\{af(t)\} = aF(s); \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.6)$

o liniowości $L\{af(t)+bg(t)\}=aF(s)+bG(s); a,b\in\mathbb{R}$ (1.7)

o podobieństwie $L\{f(at)\}=F\left(\frac{s}{a}\right); a>0$ (1.8)

o tłumieniu $L\{f(t)e^{-at}\}=F(s+a); a>0$ (1.9)

o przesunięciu $L\{f(t-a)\}=e^{-as}F(s); a>0$ (1.10)

o wartości początkowej $\lim_{t\rightarrow\infty} f(t)=\lim_{s\rightarrow 0} sF(s)$ (1.11)

o wartości końcowej $\lim_{t\rightarrow 0} f(t)=\lim_{s\rightarrow\infty} sF(s)$ (1.12)

transformacja pochodnej $L\{f^{(n)}(t)\}=s^n F(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} y^{(k)}(0)$ (1.13)

transformacja całki $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}=\frac{1}{s}F(s)$ (1.14)

4. Transformaty popularnych funkcji

Lp.	Oryginał	Transformata	Lp.	Oryginał	Transformata
1.	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	10.	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
2.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	11.	$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{s^2+2as+a^2}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12.	$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$	$e^{-a\sqrt{s}},$ $a > 0$
4.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	13.	$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$	$\frac{1}{s}(1 - \text{arctgs})$
5.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	14.	$\sin b(t+a) + \cos b(t+a)$	$\frac{s+b}{s^2+b^2} e^{-as}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	15.	$\frac{1}{2a}(\sin at - at \cos at)$	$\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}$
7.	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	16.	$\frac{1}{c} e^{-at} \sin ct,$ $c^2 = b^2 - a^2$	$\frac{1}{s^2+2as+b^2},$ $b^2 > a^2$
8.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	17.	$te^{-at} \cos bt$	$\frac{(s+a)^2-b^2}{((s+a)^2+b^2)^2}$
9.	$\delta(t)$	$\mathbf{1}(t)$	18.	$te^{-at} \sin bt$	$\frac{2b(s+a)}{((s+a)^2+b^2)^2}$

Tabela 1.1: Transformaty Laplace'a popularnych funkcji

5. Przykłady

1. Dla funkcji skoku jednostkowego $f(t)=\mathbf{1}(t)$ znaleźć transformatę Laplace'a

Z definicji

$$F(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{1}(t) e^{-st} dt \quad (1.15)$$

Ponieważ w przedziale całkowania funkcja $f(t)=1$ można zapisać

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \quad (1.16)$$

$$F(s) = \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \Big|_0^{\infty} \quad (1.17)$$

$$F(s) = -\frac{1}{s}(0-1) \quad (1.18)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (1.19)$$

2. Dla funkcji $f(t)=\sin \omega t$ znaleźć transformatę Laplace'a

Z definicji

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt \quad (1.20)$$

Całkowanie przez części nie pozwala obliczyć powyższej całki w przypadku gdy zawiera ona funkcję trygonometryczną.

Należy zastosować jeden ze wzorów Eulera

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (1.21)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (1.22)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} s^{-st} dt \quad (1.23)$$

po wyłączeniu części stałych przed całkę

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) s^{-st} dt \quad (1.24)$$

Po wymnożeniu oraz pogrupowaniu

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} s^{-st} - e^{-j\omega t} s^{-st}) dt \quad (1.25)$$

po wyłączeniu $-t$ przed nawiasy w wykładnikach oraz rozpisaniu jako dwie całki

$$F(s) = \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{-t(s-j\omega)} dt - \int_0^{\infty} e^{-t(s+j\omega)} dt \right] \quad (1.26)$$

po scałkowaniu

$$F(s) = \frac{1}{2j} \left[\frac{-1}{s-j\omega} e^{-t(s-j\omega)} \Big|_0^{\infty} - \frac{-1}{s+j\omega} e^{-t(s+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \right] \quad (1.27)$$

Po podstawieniu granic całkowania

$$F(s) = \frac{1}{2j} \left[\frac{-1}{s-j\omega} (0-1) - \frac{-1}{s+j\omega} (0-1) \right] \quad (1.28)$$

po uporządkowaniu

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1.29)$$

6. Zadania

1. Dla funkcji $f(t) = \sin^2(\omega t)$ znaleźć transformatę Laplace'a
2. Dla funkcji $f(t) = 3t$ znaleźć transformatę Laplace'a
3. Dla funkcji $f(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t)$ znaleźć transformatę Laplace'a

2. Transformacja Laplace'a odwrotna

1. Definicja

Jeżeli funkcja $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = \sigma + j\omega$ spełnia założenia posiada pochodną

$$\frac{dF(s)}{ds} \quad (2.1)$$

$$\lim_{\text{Im}(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (2.2)$$

całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + j\omega)| d\sigma \quad (2.3)$$

jest zbieżna

to funkcja określona wzorem $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds$ (2.4)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds \quad (2.5)$$

2. Metody praktyczne

1. Twierdzenie Heaviside'a

Jeżeli $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami odpowiednio stopni l i m przy czym $l < m$ i wielomian $M(s)$ ma n różnych miejsc zerowych: s_1, s_2, \dots, s_n to

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{M'(s_i)} e^{s_i t} \quad (2.6)$$

2. Metoda rozkładu na ułamki proste

Funkcje wymierne

właściwa $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *gdym $st. P(x) < st. Q(x)$* (2.7)

niewłaściwa $f(x) = W(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$ *gdym $st. P(x) \geq st. Q(x)$* (2.8)

Ułamki proste

pierwszego rodzaju $\frac{A}{(x-a)^n}$ *$a, A \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$* (2.9)

drugiego rodzaju $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ *$p, q, B, C \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$* (2.10)

Funkcję wymierną właściwą w postaci

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} \quad (2.11)$$

można zapisać jako sumę $k_1+k_2+\dots+k_r$ ułamków prostych pierwszego rodzaju $(x-a_i)^{k_i}$ o postaci

$$\frac{A_{i_1}}{x-a_i}, \quad \frac{A_{i_2}}{(x-a_i)^2}, \quad \frac{A_{i_k}}{(x-a_i)^{k_i}} \quad (2.12)$$

oraz $l_1+l_2+\dots+l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ o postaci

$$\frac{B_{j_1}x+C_{j_1}}{x^2+p_jx+g_j}, \frac{B_{j_2}x+C_{j_2}}{(x^2+p_jx+g_j)^2}, \frac{B_{j_l}x+C_{j_l}}{(x^2+p_jx+g_j)^{l_j}} \quad (2.13)$$

$$F(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B_1}{s-s_2} + \frac{B_2}{(s-s_2)^2} + \dots \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(t) = Ae^{s_1t} + B_1e^{s_2t} + B_2te^{s_2t} + \dots \end{matrix} \quad (2.15)$$

3. Metoda reszduów

Jeśli funkcja $F(s)$ zapisana w postaci ilorazu wielomianów posiada n biegunów (miejsz zerowych mianownika) to

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{s=s_i}[F(s)e^{st}] \quad (2.16)$$

gdzie:

$$\operatorname{res}_{s=s_i}[F(s)e^{st}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (2.17)$$

3. Przykłady

Znaleźć funkcje oryginału dla transformaty $F(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+3)}$

Pierwiastki mianownika (bieguny): $s_1 = -1, l_1 = 2$ i $s_2 = -3, l_2 = 1$

Metoda rozkładu na ułamki proste

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+3} \quad (2.18)$$

po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika

$$\frac{10}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A(s^2+4s+3) + B(s+3) + C(s^2+2s+1)}{(s+1)^2(s+3)} \quad (2.19)$$

Ponieważ mianowniki ułamków są sobie równe liczniki również muszą być identyczne. Aby to zachodziło należy rozwiązać układ równań liniowych (układ równań w lewej kolumnie, rozwiązanie w prawej)

$$\begin{aligned} s^2: 0 &= A + C & A &= -2,5 \\ s^1: 0 &= 4A + B + 2C & B &= 5 \\ s^0: 10 &= 3A + 3B + C & C &= 2,5 \end{aligned}$$

Po wstawieniu otrzymanych wartości do równania (2.18) przyjmuje ono postać

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{-2,5}{s+1} + \frac{5}{(s+1)^2} + \frac{2,5}{s+3} \quad (2.20)$$

Korzystając w liniowości transformaty Laplace'a (zarówno prostej jak i odwrotnej) odszukujemy w tablicach transformat funkcję oryginału dla każdego ze składników ze wzoru (2.20) wg schematu pokazanego w (2.14) i (2.15). Suma poszczególnych elementów daje nam poszukiwaną funkcję oryginału $f(t)$ czyli poszukiwaną funkcję w dziedzinie czasu

$$f(t) = -2,5e^{-t} + 5te^{-t} + 2,5e^{-3t} \quad (2.21)$$

Metoda reszduów

Zgodnie ze wzorem (2.16)

$$f(t) = \underset{s=s_1}{\text{res}} [F(s)e^{s_1 t}] + \underset{s=s_2}{\text{res}} [F(s)e^{s_2 t}] \quad (2.22)$$

dla $s_1 = -1, l_1 = 2$

$$\underset{s=-1}{\text{res}} [F(s)e^{-1t}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (2.23)$$

$$\underset{s=-1}{\text{res}} [F(s)e^{-1t}] = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[\frac{10}{(s+1)^2(s+3)} (s+1)^2 e^{st} \right] \quad (2.24)$$

$$\underset{s=-1}{\text{res}} [F(s)e^{-1t}] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[\frac{10}{(s+3)} e^{st} \right] \quad (2.25)$$

$$\underset{s=-1}{\text{res}} [F(s)e^{-1t}] = 10 \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{t e^{st}(s+3) - e^{st}}{(s+3)^2} \right] \quad (2.26)$$

$$\underset{s=-1}{\text{res}} [F(s)e^{-t}] = 5te^{-t} - 2,5e^{-t} \quad (2.27)$$

dla $s_2 = -3, l_2 = 1$

$$\underset{s=-3}{\text{res}} [F(s)e^{-3t}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (2.28)$$

$$\underset{s=-3}{\text{res}} [F(s)e^{-3t}] = \frac{1}{0!} \lim_{s \rightarrow -3} \left[\frac{10}{(s+1)^2(s+3)} (s+3) e^{-3t} \right] \quad (2.29)$$

$$\underset{s=-3}{\text{res}} [F(s)e^{-3t}] = \lim_{s \rightarrow -3} \left[\frac{10}{(s+1)^2} e^{-3t} \right] \quad (2.30)$$

$$\operatorname{res}_{s=-3} [F(s)e^{-3t}] = 2,5e^{-3t} \quad (2.31)$$

podstawiając (2.27) i (2.31) do (2.22)

$$f(t) = 5te^{-t} - 2,5e^{-t} + 2,5e^{-3t} \quad (2.32)$$

4. Zadania

1. Znaleźć funkcje oryginału dla transformaty

$$F(s) = \frac{4s+1}{(s+2)(s+3)^2} \quad (2.33)$$

2. Znaleźć funkcje oryginału dla transformaty

$$F(s) = \frac{10s+1}{s^2+10s+24} \quad (2.34)$$

3. Modelowanie przy pomocy transmitancji operatorowej

Dany jest obiekt dynamiczny jak na Rys. 3.1



Rys. 3.1 Obiekt dynamiczny

do wejścia, którego doprowadzany sygnał wejściowy $x(t)$ (wymuszenie) a na wyjściu obserwujemy sygnał wyjściowy $y(t)$ (odpowiedź).

Po zapisaniu układu równań opisujących prawa fizyczne obowiązujące w obiekcie należy je tak przekształcić aby otrzymać równanie zawierające wyłącznie wymuszenie i odpowiedź (5.1)

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^{(m)} x(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \frac{d x(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Równanie (5.1) to równanie dynamiki. Jest to równanie różniczkowe które zawiera zestaw pochodnych wymuszenie z odpowiednimi współczynnikami po jednej stronie i zestawem pochodnych odpowiedzi z odpowiednimi współczynnikami po drugiej. Można je zapisać w postaci skondensowanej (3.2)

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)} y(t)}{dt^{(i)}} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{(j)} x(t)}{dt^{(j)}} \quad (3.2)$$

Współczynniki a_i, b_j w równaniach (5.1) i (3.2) są stałymi liczbami rzeczywistymi gdy układ jest:

- 1) liniowy tzn. w/w współczynniki są stałe, niezależne od wartości sygnałów
- 2) stacjonarny tzn. w/w współczynniki są stałe, niezmiennie się w czasie

Jeśli współczynniki są stałe to korzystając z następujących własności transformacji Laplace'a

- 1) liniowość
- 2) transformata pochodnej

oraz zakładając zerowe warunki początkowe równanie (5.1) po dwustronnej transformacji Laplace'a przyjmuje postać (3.3)

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s) \quad (3.3)$$

lub w wersji skondensowanej (3.4)

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j X(s) \quad (3.4)$$

gdzie $X(s)$ i $Y(s)$ to transformaty Laplace'a odpowiednio wymuszenia i odpowiedzi.

Po wyłączeniu $X(s)$ i $Y(s)$ przed nawiasy otrzymujemy (3.5)

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_1 s + a_0] Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_1 s + b_0] X(s) \quad (3.5)$$

Transmitancja operatorowa $G(s)$ obiektu dynamicznego (ang. *Transfer function*) definiowana jest jako stosunek transformaty Laplace'a odpowiedzi do transformaty Laplace'a wymuszenia (3.6)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_1 s + a_0} \quad (3.6)$$

Jest to postać tzw. wielomianowa transmitancji

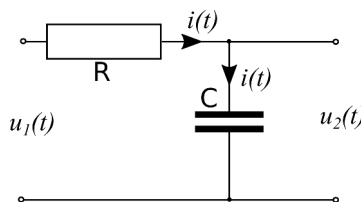
Postać zapisana wzorem (3.7) to postać tzw. zero-biegunowa (ang. *Zero-pole*). Zera to miejsca zerowe licznika a bieguny to miejsca zerowe mianownika.

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{j=0}^m (s - z_j)}{a_n \prod_{i=0}^n (s - p_i)} = k \frac{\prod_{j=0}^m (s - z_j)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)} \quad (3.7)$$

gdzie: k - wsp. wzmocnienia, z_j - zera, p_i - bieguny

Przykłady

- 1) Wyznaczyć transmitancję operatorową dla czwórnika RC



Rys. 3.2: Czwórnik RC

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t) \quad (3.8)$$

$$u_2(t) = u_C(t) \quad (3.9)$$

$$u_R(t) = R i(t) \quad (3.10)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.11)$$

$$u_1(t) = RC \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \quad (3.12)$$

$$U_1(s) = RCsU_2(s) + U_2(s) \quad (3.13)$$

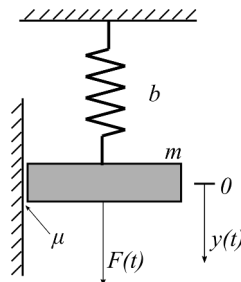
$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1} \quad (3.14)$$

Jest to obiekt inercyjny- I rzędu

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} \quad (3.15)$$

gdzie: k -wzmocnienie, T – stała czasowa

- 2) Wyznaczyć transmitancję operatorową dla oscylatora harmonicznego z tłumieniem (b - współczynnik sprężystości sprężyny, μ -wsp tarcia ślizgowego zależnego od prędkości)



Rys. 3.3:
Mechaniczny

Równanie dynamiki dynamiki.

$$F(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \mu \frac{dy(t)}{dt} + b y(t) \quad (3.16)$$

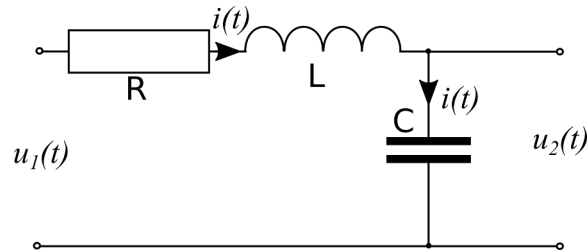
Po obustronnej transformacji Laplace'a

$$F(s) = ms^2 Y(s) + \mu s Y(s) + b Y(s) \quad (3.17)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \mu s + b} \quad (3.18)$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{m}{b}s^2 + \frac{\mu}{b}s + 1} \quad (3.19)$$

3) Wyznaczyć transmitancję operatorową dla czwórniak RLC



Rys. 3.4: Czwórnik RLC

$$u_1(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (3.20)$$

$$u_C(t) = u_2(t) \quad (3.21)$$

$$u_R(t) = R i(t) \quad (3.22)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.23)$$

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (3.24)$$

$$u_1(t) = RC \frac{du_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2u_2(t)}{dt^2} + u_2 \quad (3.25)$$

Po obustronnej transformacji Laplace'a

$$U_1(s) = LC s^2 U_2(s) + RCs U_2(s) + U_2(s) \quad (3.26)$$

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3.27)$$

Rozpatrywane powyżej obiekty mechaniczny i elektryczny o transmitancjach danych wzorami odpowiednio (3.19) i (3.27) są to obiekty **oscylacyjne II-rzędu**.

Ogólnie transmitancję operatorową obiektu **oscylacyjne II-rzędu** wyraża wzór

$$G(s) = \frac{k}{T_n^2 s^2 + 2\zeta T_n s + 1} \quad (3.28)$$

gdzie: k -wzmocnienie, T_n – okres drgań własnych nietłumionych, ζ – współczynnik tłumienia.

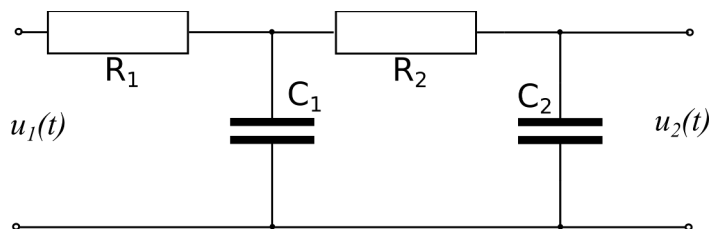
Jeśli mianownik transmitancji operatorowej przyrównamy do zera to otrzymamy tzw. równanie charakterystyczne. Rodzaj pierwiastków tego równania (inaczej rodzaj biegunów transmitancji) decyduje o charakterze obiektu.

Obiekt ma **właściwości oscylacyjne** gdy **równanie charakterystyczne ma pierwiastki (transmitancja ma bieguny) zespolone.**

Obiekt ma **właściwości inercyjne** gdy **równanie charakterystyczne ma pierwiastki (transmitancja ma bieguny) rzeczywiste.**

Zadania

- 1) Wyznaczyć transmitancję układu przedstawionego na Rys. 3.5

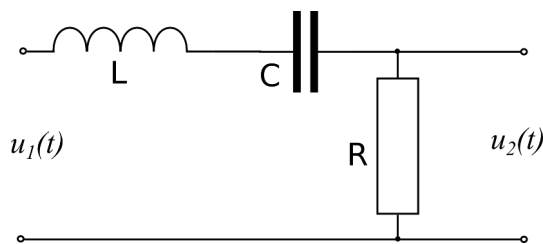


Rys. 3.5: Czwórnik RCRC

Odpowiedź:

$$G(s) = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

- 2) Wyznaczyć transmitancję układu przedstawionego na Rys. 3.6

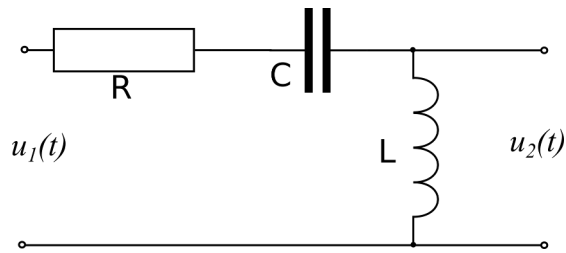


Rys. 3.6: Czwórnik LCR

Odpowiedź:

$$G(s) = \frac{sRC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 3) Wyznaczyć transmitancję układu przedstawionego na Rys. 3.7



Rys. 3.7: Czwórnik RCL

$$G(s) = \frac{LCs^2}{LCs^2 + RCs + 1}$$

- 4) Wykazać, że układ z Rys. 3.5 (czwórnik RCRC) jest układem inercyjnym
- 5) Dla jakich wartości k , b , μ układ z przykładu nr 2 jest układem oscylacyjnym
- 6) Dla jakich wartości R , L , C układ z przykładu nr 2 jest układem oscylacyjnym
- 7) Dla jakich wartości ζ układ oscylacyjny, o transmitancji podanej wzorem wzorem (3.28) ma właściwości oscylacyjne
- 8) Dla jakich wartości ζ układ oscylacyjny, o transmitancji podanej wzorem wzorem (3.28) traci właściwości oscylacyjne i staje się układem inercyjnym

4. Wyznaczanie odpowiedzi obiektu na zadane wymuszenie

Dany jest obiekt dynamiczny jak na Rys. 4.1



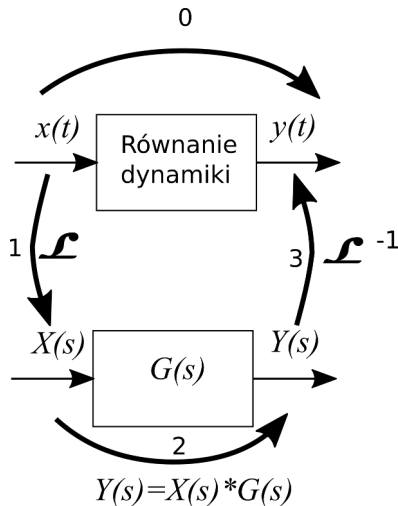
Rys. 4.1: Obiekt dynam.

do wejścia, którego doprowadzany sygnał wejściowy $x(t)$ (wymuszenie) a na wyjściu obserwujemy sygnał wyjściowy $y(t)$ (odpowiedź).

Po zapisaniu układu równań opisujących prawa fizyczne obowiązujące w obiekcie należy je tak przekształcić aby otrzymać równanie zawierające wyłącznie wymuszenie i odpowiedź (5.1) (tzw. równanie dynamiki)

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^{(m)} x(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \frac{d x(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Na Rys. 4.2 pokazano różne drogi pozwalające wyznaczyć odpowiedź $y(t)$ na znane wymuszenie $x(t)$.



Rys. 4.2: Wyznaczanie odpowiedzi

A) Ścieżka nr 0

Aby wyznaczyć poszukiwany sygnał odpowiedzi $y(t)$ na znane wymuszenie $x(t)$ należy rozwiązać równanie różniczkowe (5.1). Może to być proces pracochłonny.

B) Ścieżka nr 1→2→3

1. Wyznaczenie transformaty Laplace'a wymuszenia $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ (transformacja prosta)
2. Wyznaczenie transformaty Laplace'a odpowiedzi z zależności $Y(s) = X(s) * G(s)$
3. Wyznaczenie oryginału odpowiedzi $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ (transformacja odwrotna)

Ścieżka B przenosi obliczenia z dziedziny czasu t do dziedziny zmiennej zespolonej s (krok 1). Tam dokonujemy obliczeń rozwiązując równania algebraiczne zamiast różniczkowych (krok 2) a następnie wracamy do dziedziny czasu (krok 3).

Transmitancję operatorową można wyznaczyć na podstawie równania dynamiki (5.1) i dana jest ona wzorem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_1 s + a_0} \quad (4.1)$$

Przykłady

- 1) Wyznaczyć odpowiedź układu dwuinercyjnego o wzmocnieniu $k=2$ oraz stałych czasowych $T_1=0,5$ s i $T_2=0,2$ s na sygnał $x(t)=3t$.

Dla układu podanego w przykładzie transmitancja operatorowa wynosi

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{2}{(0,5 s + 1)(0,2 s + 1)} \quad (4.2)$$

Krok 1 – Wyznaczenie transformaty Laplace'a wymuszenia (z definicji)

$$X(s) = \int_{t=0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{t=0}^{\infty} 3t e^{-st} dt \quad (4.3)$$

Wewnątrz całki występuje iloczyn funkcji więc można zastosować całkowanie przez części

$$X(s) = \int_{t=0}^{\infty} 3t e^{-st} dt = \left| \begin{array}{l} u=3t \quad u'=3 \\ v=-\frac{1}{s} e^{-st} \quad v'=e^{-st} \end{array} \right| = 3t \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \Big|_0^{\infty} - \int_{t=0}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt \quad (4.4)$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} (3te^{-st}) \Big|_0^{\infty} - 3 \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{3}{s} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{st}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{e^{st}} \right] - \frac{3}{s^2} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{st}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{st}} \right] \quad (4.5)$$

Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala do pierwszego składnika oraz obliczeniu pozostałych granic transformata wymuszenia dana jest wzorem

$$X(s) = \frac{3}{s^2} \quad (4.6)$$

Krok 2 - Wyznaczenie transformaty Laplace'a odpowiedzi

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{3}{s^2} \frac{2}{(0,5s+1)(0,2s+1)} \quad (4.7)$$

Krok 3 - Wyznaczenie funkcji oryginału odpowiedzi na podstawie jego transformaty

Aby znaleźć bieguny (miejsca zerowe mianownika) trzeba dokonać przekształcenia

$$Y(s) = \frac{3}{s^2} \frac{2}{0,5(s+2) \quad 0,2(s+5)} = \frac{60}{s^2(s+2)(s+5)} \quad (4.8)$$

Występują tu bieguny s_i o krotnościach l_i

$$\begin{array}{ll} s_1=0 & l_1=2 \\ s_2=-2 & l_2=1 \\ s_3=-5 & l_3=1 \end{array} \quad (4.9)$$

Znalezienie funkcji oryginału $y(t)$ można wykonać metodą **rozkładu na ułamki proste** lub metodą **residuów**.

Metoda rozkładu na ułamki proste:

Transformatę zapisujemy jako sumę ułamków prostych (ze zwróceniem szczególnej uwagi na bieguny wielokrotne)

$$\frac{60}{s^2(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+2)} + \frac{D}{(s+5)} \quad (4.10)$$

Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika.

$$\frac{60}{s^2(s+2)(s+5)} = \frac{As(s+2)(s+5) + B(s+2)(s+5) + Cs^2(s+5) + Ds^2(s+2)}{s^2(s+2)(s+5)} \quad (4.11)$$

Ponieważ mianowniki są równe więc i liczniki muszą być sobie równe.

Aby wielomiany będące licznikami obu pierwiastków były równe muszą mieć identyczne współczynniki przy poszczególnych potęgach. To daje nam układ równań liniowych w lewej kolumnie i jego rozwiązanie w prawej

$$\begin{aligned} s^3: 0 &= A + C + D & A &= -4,2 \\ s^2: 0 &= 7A + B + 5C + 2D & B &= 6 \\ s^1: 0 &= 10A + 7B & C &= 5 \\ s^0: 10B & & D &= -0,8 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Po wstawieniu otrzymanych współczynników A, B, C, D do sumy ułamków prostych czyli do (4.10)

$$Y(s) = -4,2 \frac{1}{s} + 6 \frac{1}{s^2} + 5 \frac{1}{(s+2)} - 0,8 \frac{1}{(s+5)} \quad (4.13)$$

Korzystając w liniowości transformaty Laplace'a (zarówno prostej jak i odwrotnej) odszukujemy w tablicach transformat funkcję oryginału dla każdego ze składników ze wzoru (4.13). Suma poszczególnych elementów daje nam poszukiwaną funkcję oryginału $y(t)$ czyli poszukiwaną odpowiedź układu na zadane wymuszenie

$$y(t) = -4,2 * \mathbf{1}(t) + 6t + 5e^{-2t} - 0,8e^{-5t} \quad (4.14)$$

5. Modelowanie przy pomocy zmiennych stanu

Niech będzie dany układ dynamiczny jak na Rys. 5.1



Rys. 5.1: Układ dynamiczny

Zakładamy, że rozpatrywany układ opisany jest równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t) \quad (5.1)$$

Znając warunki początkowe czyli wartości $y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ oraz sygnał wymuszenia $u(t)$ można rozwiązać równanie (5.1) czyli wyznaczyć $y(t)$.

Układy dynamiczne mają zdolność gromadzenia energii skutkiem czego niemożliwe jest wyznaczenie odpowiedzi $y(t)$ nawet dla znanego sygnału $u(t)$ jeśli nieznana jest jego historia czyli $u(t)|_{t < t_0}$. Koniecznym jest wprowadzenie pojęcia **stanu układu**. Stan jest to minimalna liczba zmiennych pozwalającą jednoznacznie określić historię układu dynamicznego lub inaczej warunki początkowe. Znając stan układu oraz przebieg wymuszenia $u(t)$ w przyszłości można określić odpowiedź $y(t)$.

Równanie różniczkowe rzędu n takie jak (5.1) można zapisać w tzw. postaci normalnej czyli w postaci układu n równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

lub w wersji skróconej

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Podsumowując, znając wartości zmiennych x_i ($i=1,2,\dots,n$) w chwili t_0 oraz sygnałów wymuszających $u_i(t)$ ($i=1,2,\dots,m$) dla $t \geq t_0$ jesteśmy w stanie wyznaczyć zachowanie układu dla $t \geq t_0$.

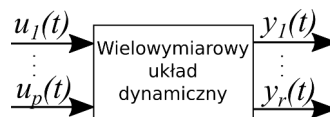
Zmienne x_i opisują stan układu w danej chwili więc nazywane są **zmiennymi stanu**.

Zmienne x_i można zapisać w postaci wektora, który nazywamy **wektorem stanu**.

Przestrzeń n -wymiarową o współrzędnych x_i nazywamy **przestrzenią stanu**.

Krzywa zakreślana przez koniec wektora stanu w przestrzeni stanu to **trajektoria stanu**.

Na Rys. 5.2 przedstawiono układ wielowymiarowy o p wejściach i r wyjściach



Rys. 5.2: Układ wielowymiarowy

Mając wektor stanu oraz dodatkowo w przypadku układów o wielu wejściach/wyjściach, kiedy wymuszenia u_i i odpowiedzi y_i również tworzą wektory, wygodny jest zapis macierzowy (5.4), (5.5).

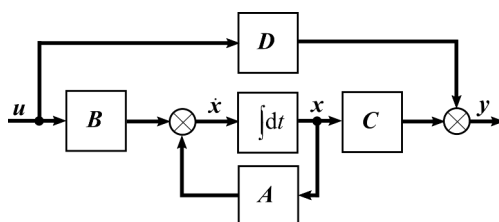
Otrzymujemy wówczas **równanie stanu**:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.4)$$

oraz **równanie wyjścia**:

$$y = Cx + Du \quad (5.5)$$

Schemat blokowy odpowiadający równaniom (5.4) i (5.5) przedstawiono na Rys. 5.3



Rys. 5.3: Modelowanie przy pomocy zmiennych stanu schemat

Opis macierzy występujących w równaniach (5.4) i (5.5) oraz na Rys. 5.1 przedstawiono w tabeli 5.1.

Tabela 5.1: Oznaczenia macierzy w modelu zmiennych stanu

Lp.	Oznaczenie	Nazwa	Wymiar
1	x	Wektor stanu	n
2	\dot{x}	Pochodna wektora stanu	n
3	u	Wektor wejść	p
4	y	Wektor wyjść	r
5	A	Macierz dynamiki	$n;n$
6	B	Macierz wejść	$n;p$
7	C	Macierz wyjść	$r;n$
8	D	Macierz tranzycyjna (bezpośredniego sterowania)	$r;p$

Przy pomocy zmiennych stanu można modelować także układy **nieliniowe** i **niestacjonarne**. Wówczas macierze A, B, C, D nie zawierają wartości stałych a funkcje o wartościach zależnych od sygnałów (nieliniowe) lub czasu (niestacjonarne).

Jeśli jako zmienną stanu x_1 przyjmiemy jeden z sygnałów w układzie a jako kolejne zmienne x_2, \dots, x_n kolejne pochodne tego sygnału to zmienne takie nazywamy **zmiennymi fazowymi**, przestrzeń którą tworzą będąc jej współrzędnymi to **przestrzeń fazowa**, z krzywa zakreślana w tej przestrzeni przez koniec wektora wyznaczonego zmiennymi to **trajektoria fazowa**.

Jako zmienne stanu można również przyjąć dowolne inne sygnały występujące w układzie.

W układach SISO (ang. *single input single output*) często przyjmuje się zmienne fazowe wg następującego schematu: jako x_1 przyjmuje się sygnał wyjściowy (odpowiedź) $y(t)$ i jako kolejne zmienne odpowiednio kolejne pochodne odpowiedzi.

Niech będzie dany układ opisany równaniem (5.1).

Po podzieleniu dwustronnie przez współczynnik przy najwyższej pochodnej otrzymujemy

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} \dots + \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} + \frac{a_0}{a_n} y = \frac{1}{a_n} u(t) \quad (5.6)$$

a po przekształceniu

$$y^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} \dots - \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} - \frac{a_0}{a_n} y + \frac{1}{a_n} u(t) \quad (5.7)$$

Przyjmując $x_1=y(t)$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = y^{(1)} \\ \dot{x}_2 &= x_3 = y^{(2)} \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} + \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \frac{1}{a_n} u = \frac{-a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 + \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u \end{aligned} \quad (5.8)$$

Zapisując macierzowo układ równań (5.8) otrzymujemy **równanie stanu**

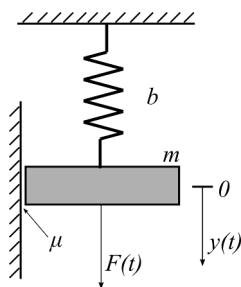
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} * u \quad (5.9)$$

oraz **równanie wyjścia** (ponieważ $x_1=y(t)$)

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [0] * u \quad (5.10)$$

Przykłady

- 1) Zapisać równanie stanu i równanie wyjścia dla oscylatora harmonicznego z tłumieniem (b-współczynnik sprężystości sprężyny, b -wsp tarcia ślizgowego zależnego od prędkości)



Rys. 5.4:
Oscylator
harmoniczny

Równanie dynamiki dla powyższego układu

$$F(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \mu \frac{dy(t)}{dt} + b y(t) \quad (5.11)$$

$$y^{(2)} = -\frac{\mu}{m} y^{(1)} - \frac{b}{m} y + \frac{1}{m} u \quad (5.12)$$

Przyjmując, że $x_1 = y(t)$ oraz $u(t) = F(t)$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu}{m} x_2 - \frac{b}{m} x_1 + \frac{1}{m} u \end{aligned} \quad (5.13)$$

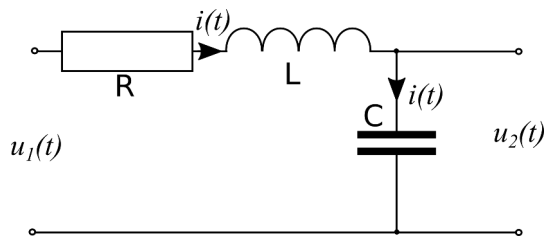
co w zapisie macierzowym daje równanie stanu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} * u \quad (5.14)$$

i równanie wyjścia

$$y = [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] * u \quad (5.15)$$

- 2) Zapisać równanie stanu i wyjścia dla czwórnika RLC



Rys. 5.5: Czwórnik RLC

a) Przyjmijmy jako zmienne stanu prąd cewki oraz napięcie kondensatora, $x_1=i(t)$, $x_2=u_C(t)$

Równania dynamiki

$$\begin{aligned} u_1(t) &= Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u_C \\ i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} \\ u_2(t) &= u_C(t) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Po przekształceniu powyższego układu równań aby po lewych stronach uzyskać najwyższe pochodne zmiennych stanu bez współczynników

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u_1(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i(t) \\ u_2(t) &= u_C(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Równanie stanu i równanie wyjścia

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} * u_1 \quad (5.18)$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + [0] * u_1 \quad (5.19)$$

To samo tylko w wykorzystaniem oznaczeń zmiennych stanu x_1 i x_2 .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} * u_1$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] * u_1$$

b) Przyjmijmy fazowe zmienne stanu czyli $x_1=u_2(t)$

Na podstawie układu równań (5.16) zapiszmy równanie dynamiki

$$u_1(t) = RC \frac{du_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2u_2(t)}{dt^2} + u_2 \quad (5.20)$$

Po przekształceniu aby po lewej stronie była samodzielnie najwyższa pochodna

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{du_2}{dt} - \frac{1}{LC} u_2 + \frac{1}{LC} u_1 \quad (5.21)$$

Po przekształceniu do układu równań oraz wprowadzeniu oznaczeń zmiennych stanu

$$\begin{aligned} x_1 &= u_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{LC} u_1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Układ równań (5.22) przekształcony do macierzowego równania stanu

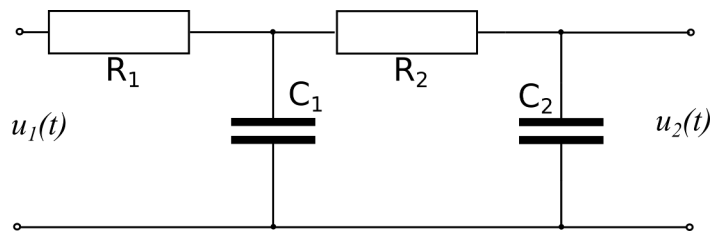
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} * u_1 \quad (5.23)$$

oraz równanie wyjścia

$$y = [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] * u_1 \quad (5.24)$$

Zadania do samodzielnego wykonania

- 1) Zamodelować przy pomocy zmiennych stanu układ na Rys. 5.6

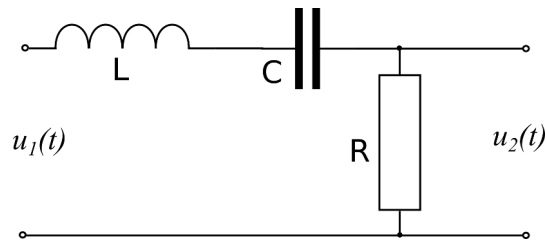


Rys. 5.6: Czwórnik RCRC

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_2 \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} & -\frac{1}{(R_1 C_1) + (R_2 C_2) + (R_1 C_2)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \end{bmatrix} * u \\ y &= [1 \quad 0] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] * u \end{aligned} \quad (5.25)$$

- 2) Zamodelować przy pomocy zmiennych stanu układ na Rys. 5.7



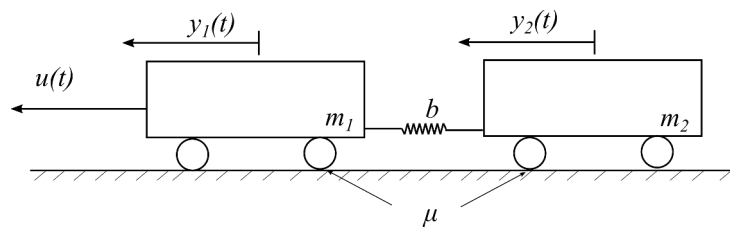
Rys. 5.7: Czwórnik LCR

Odpowiedź:

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \quad (5.26)$$

$$u_2 = [R \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} + [0] u_1 \quad (5.27)$$

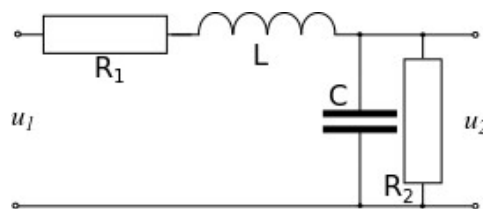
- 3) Zamodelować przy pomocy zmiennych stanu układ na Rys. 5.8
4)



Rys. 5.8: Wagoniki połączone elastycznym złączem

Jako wymuszenie przyjąć siłę ciągnąca $u(t)$, jako odpowiedź przemieszczenie wagoników $y_1(t)$ i $y_2(t)$. b – współczynnik sprężystości sprężyny, μ – współczynnik tarcia toczonego zależnego od prędkości i siły nacisku

- 5) Zamodelować przy pomocy zmiennych stanu układ na Rys. 5.9

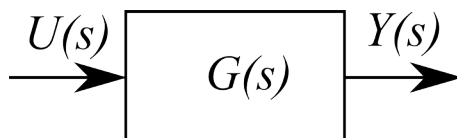


Rys. 5.9: Czwórnik R1LCR2

6. Przekształcanie schematów blokowych

Założenia

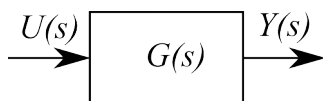
1. Obiekty dynamiczne przedstawione są przy pomocy modeli wejście-wyjście tak jak na Rys. 6.1
2. Znanie są transmitancje operatorowe $G(s)$ poszczególnych elementów
3. Elementy do których dostarczany jest sygnał nie obciążają wyjść elementów generujących sygnał



Rys. 6.1: Obiekt dynamiczny

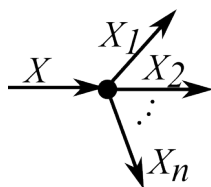
Elementy składowe

1. Obiekt o znanej transmitancji operatorowej $G(s)$



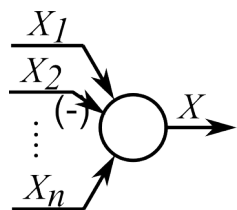
$$G(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(s)}{U(s)} \rightarrow Y(s) = U(s) G(s)$$

2. Węzeł rozgałęźny lub zaczepowy



$$X(s) = X_1(s) = X_2(s) = \dots = X_n(s)$$

3. Węzeł sumacyjny

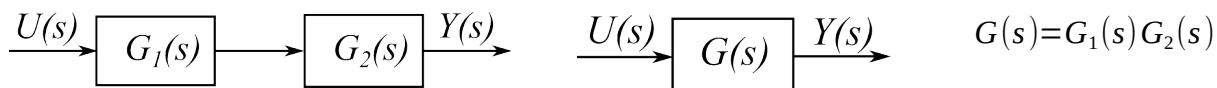


$$X(s) = \pm X_1(s) \pm X_2(s) \dots \pm X_n(s)$$

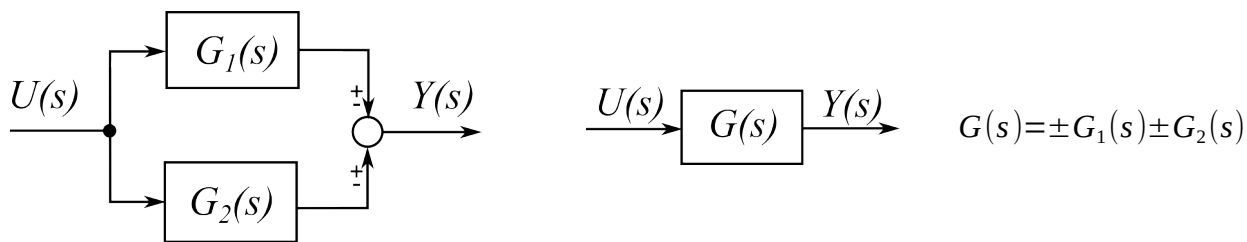
Przy wejściach węzła sumacyjnego jeśli **nie ma znaku lub jest plus** sygnał wchodzi do sumy ze znakiem **dodatnim**, jeśli jest znak **minus** to wchodzi ze znakiem **ujemnym**.

Przekształcanie schematu – reguły

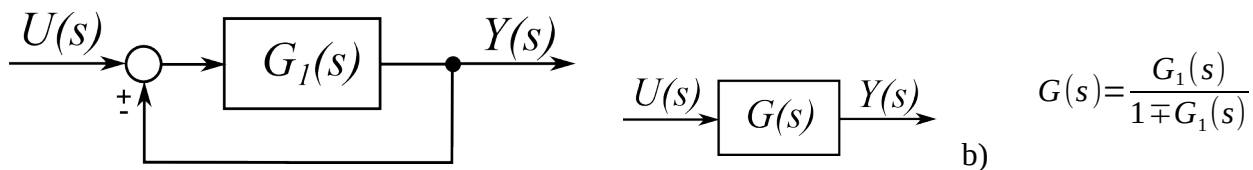
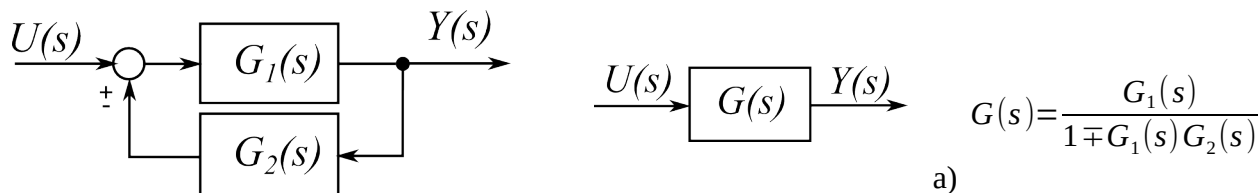
1. Połączenie szeregowe (kaskadowe)



2. Połączenie równoległe

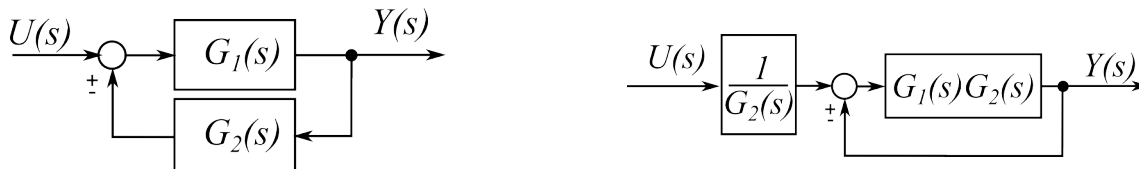


3. Układ zamknięty (ze sprzężeniem zwrotnym)

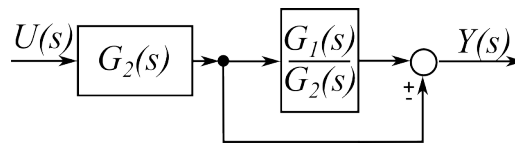
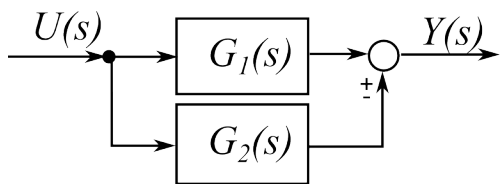


UWAGA! W mianowniku wzorów 3a i 3b znak jest przeciwny do znaku sprzężenia zwrotnego.

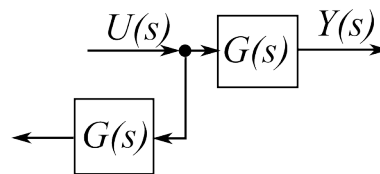
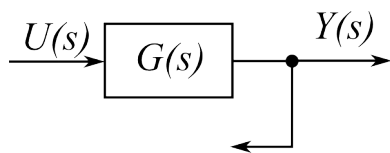
4. Zamiana sprzężenia niepełnego w pełne



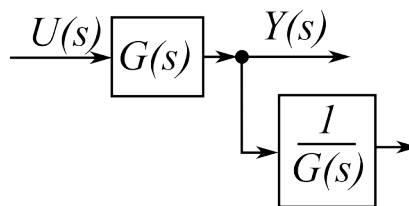
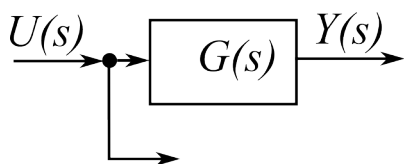
5. Wydzielenie członu z gałęzi równoległej



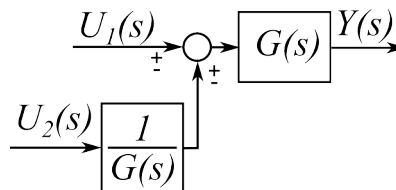
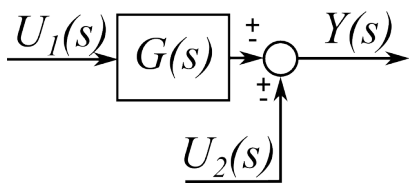
6. Przesunięcie węzła zaczepowego przed człon



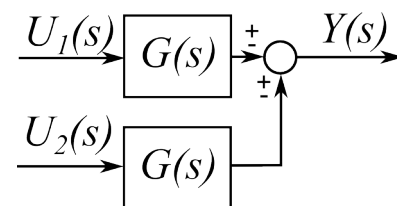
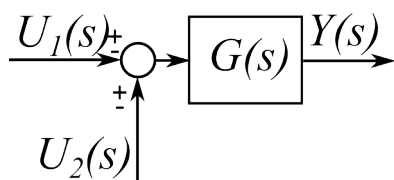
7. Przesunięcie węzła zaczepowego za człon



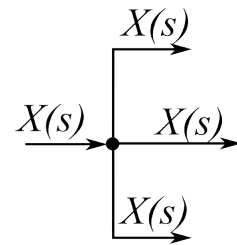
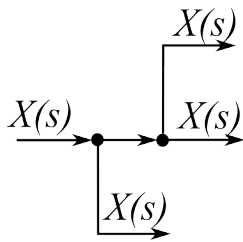
8. Przesunięcie węzła sumacyjnego przed człon



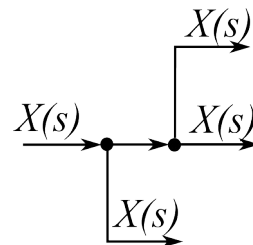
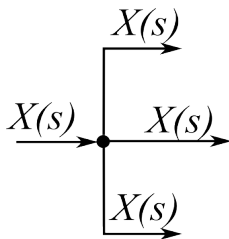
9. Przesunięcie węzła sumacyjnego za człon



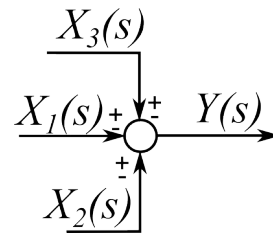
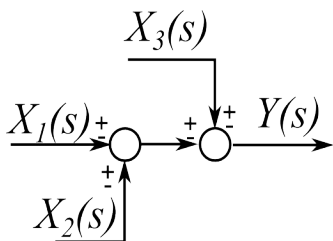
10. Łączenie węzłów zaczepowych



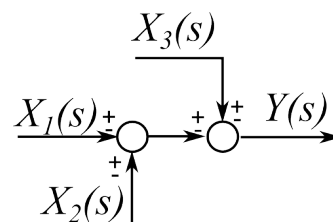
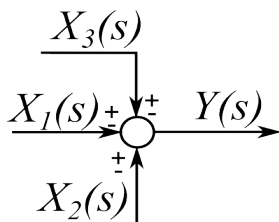
11. Rozdzielanie węzłów zaczepowych



12. Łączenie węzłów sumacyjnych



13. Rozdzielanie węzłów sumacyjnych



14. Zamiana kolejności węzłów zaczepowych



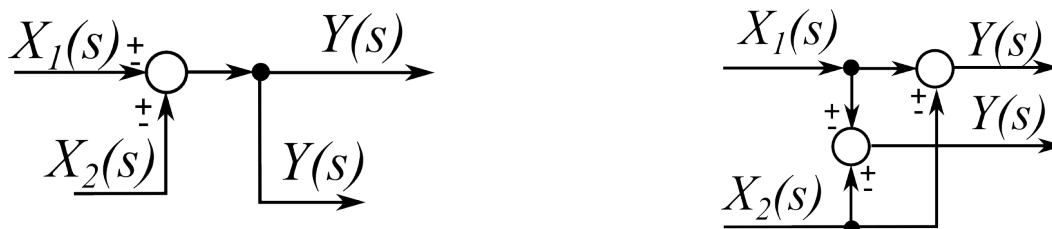
15. Zamiana kolejności węzłów sumacyjnych



16. Zamiana kolejności węzłów zaczepowego i sumacyjnego

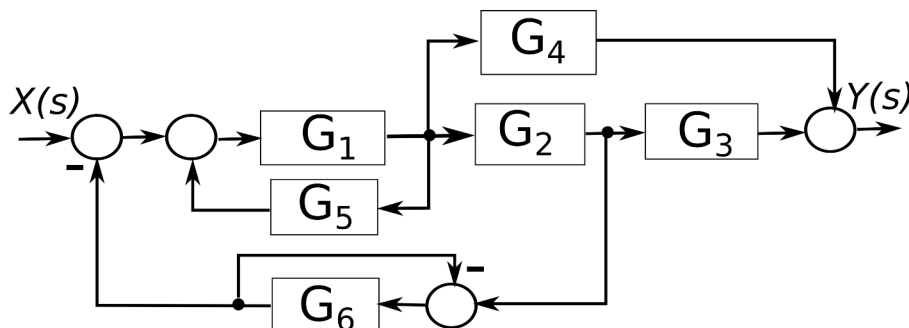


17. Zamiana kolejności węzłów sumacyjnych i zaczepowego



Przykłady

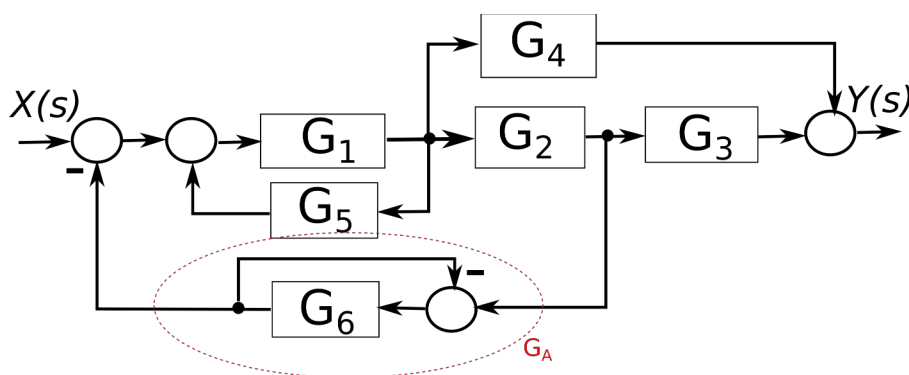
Przekształcić schemat pokazany na Rys. 6.2 do pojedynczego bloku



Rys. 6.2: Schemat wyjściowy

Schemat zawiera kilka wzajemnie „zapętłonych” połączeń dlatego nie można bezpośrednio zastosować żadnej z reguł. Trzeba to robić etapami,

Na Rys. 6.3 pokazano obrysowaną linią przerywaną pewien fragment, który można zastąpić blokiem o transmitancji G_A .

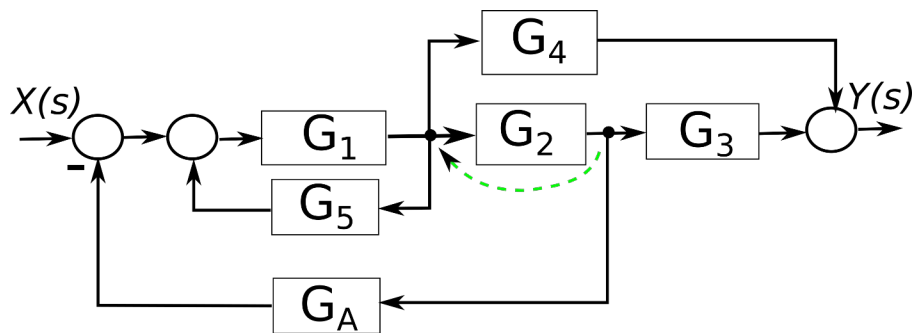


Rys. 6.3: Przekształcanie schematu – krok 1

Ponieważ fragment schematu to jest układ ze sprzężeniem zwrotnym (tzw. układ ze sprzężeniem pełnym) można do niego zastosować regułę 3a. W przypadku układu ze sprzężeniem zwrotnym najpierw należy określić która część układu jest **torem głównym** w którą **torem sprzężenia zwrotnego**. W powyższym przypadku sygnał wchodzi do bloku G_A z prawej strony a wychodzi z lewej więc część układu, która przesyła sygnał w tym właśnie kierunku to tor główny z częścią którą sygnał biegnie w kierunku przeciwnym to tor sprzężenia zwrotnego. Tor główny to blok G_6 , sprzężenie **ujemne**.

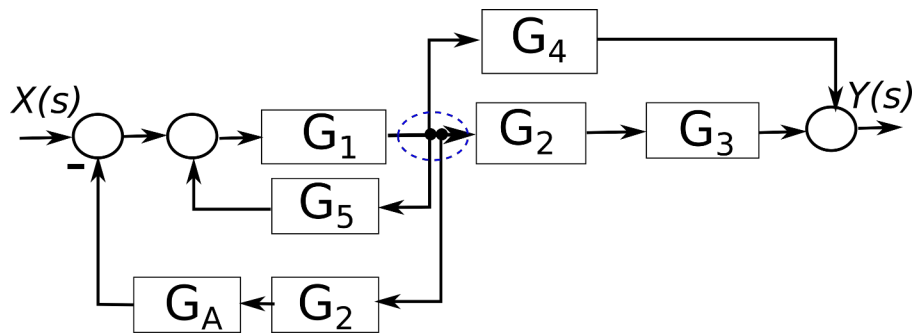
$$G_A = \frac{G_6}{1 + G_6} \quad (6.1)$$

Na Rys. 6.4 Pokazano schemat z jego częścią zastąpioną blokiem G_A .



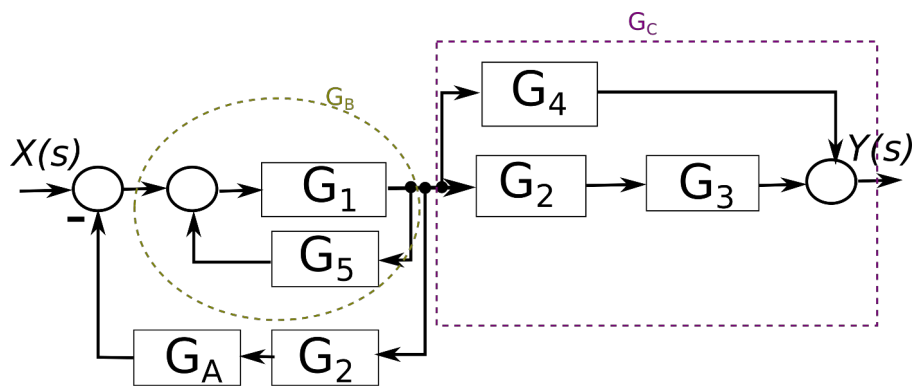
Rys. 6.4: Przekształcanie schematu – krok 2

Kolejny etap to przesunięcie węzła zaczepowego pobierającego sygnał dla bloku G_A w lewo przed blok G_2 (zielona strzałka). (Inne rozwiązanie to przesunięcie węzła zaczepowego dostarczającego sygnał do G_4 w prawo za $G_2^{(*)}$). Ponieważ zmiana położenia węzła zaczepowego powoduje zmianę sygnału dostarczanego do G_A Należy dodać dodatkowy blok aby przywrócić sygnałowi pierwotną wartość. Jest to dodatkowy blok G_2 wpięty szeregowo z blokiem G_A (reguła 6). Układ po tej zmianie przedstawiony jest na Rys. 6.5



Rys. 6.5: Przekształcanie schematu – krok 3

Aby schemat był bardziej czytelny należy zmienić kolejność węzłów zaczepowych obrysowanych niebieską linią (reguła 14). Po tej zmianie układ przedstawiony jest na Rys. 6.6



Rys. 6.6: Przekształcanie schematu – krok 3

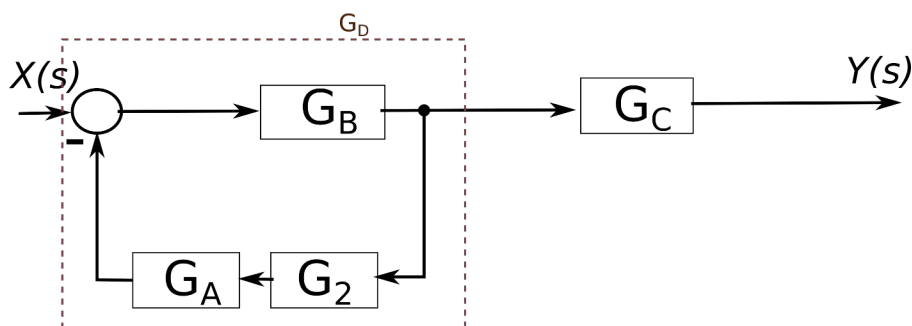
Na schemacie na Rys. 6.6 wyraźnie widać fragmenty, które można zwinąć do pojedynczych bloków. Fragment oznaczony G_B to układ ze sprzężeniem zwrotnym (reguła 3a). Tor główny to G_1 tor sprzężenia to G_5 , **sprężenie dodatnie**.

$$G_B = \frac{G_1}{1 - G_1 G_5} \quad (6.2)$$

Fragment oznaczony G_C to połączenie równoległe (reguła 2) ponieważ sygnał biegnie z lewej do prawej zarówno w gałęzi $G_2 G_3$ jak i w gałęzi G_4 . Dodatkowo elementy G_2 i G_3 są połączone szeregowo (reguła 1)

$$G_C = G_4 + G_2 G_3 \quad (6.3)$$

Po zastąpieniu fragmentów blokami G_B i G_C schemat przyjmuje postać jak na Rys. 6.7

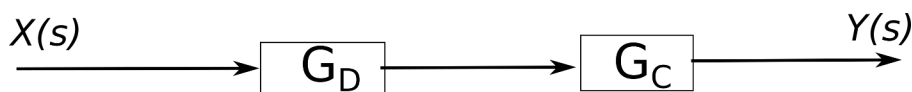


Rys. 6.7: Przekształcanie schematu – krok 3

Fragment oznaczony G_D to układ ze sprzężeniem zwrotnym (reguła 3a). Tor główny to G_B tor sprzężenia to G_A i G_2 , **sprężenie ujemne**. Dodatkowo w torze sprzężenia elementy G_2 i G_A są połączone szeregowo (reguła 1)

$$G_D = \frac{G_B}{1 + G_B G_A G_2} \quad (6.4)$$

Na Rys. 6.8 pokazano schemat po zastąpieniu odpowiednich fragmentów blokami o wyliczonych transmitancjach G_D i G_C . Są one połączone szeregowo (reguła 1)



Rys. 6.8: Przekształcanie schematu – krok 3

Ostatecznie

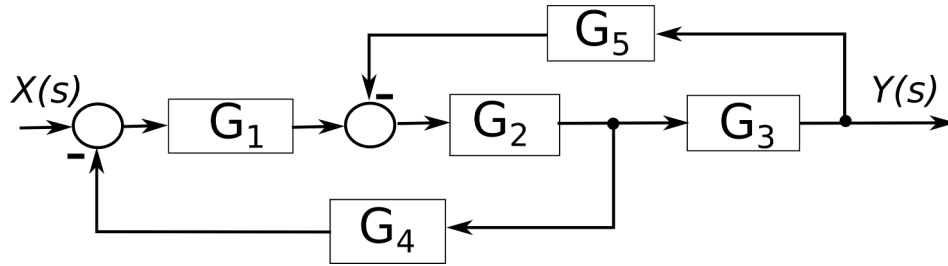
$$G(s) = G_D G_C \quad (6.1)$$

Po wstawieniu (7.1) i (7.2) do (7.4) a następnie (7.3) i (7.4) do (6.1) i przekształceniu otrzymujemy

$$G = \frac{G_1 G_4 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_6}{1 + G_6 - G_1 G_5 - G_1 G_5 G_6 + G_1 G_2 G_6} \quad (6.2)$$

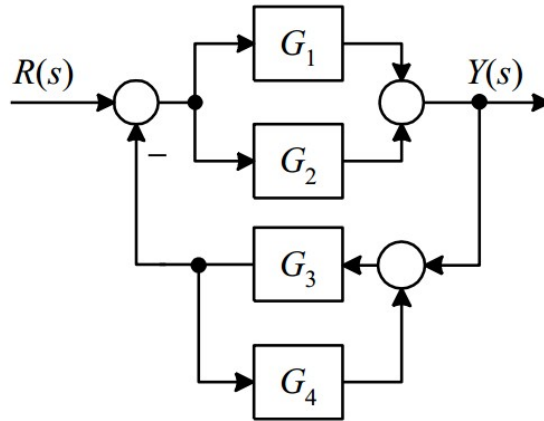
Zadania

1. Przekształcić schemat z przykładu stosując inne rozwiązanie oznaczone (*) na stronie 7
2. Przekształcić schemat z Rys. 6.9



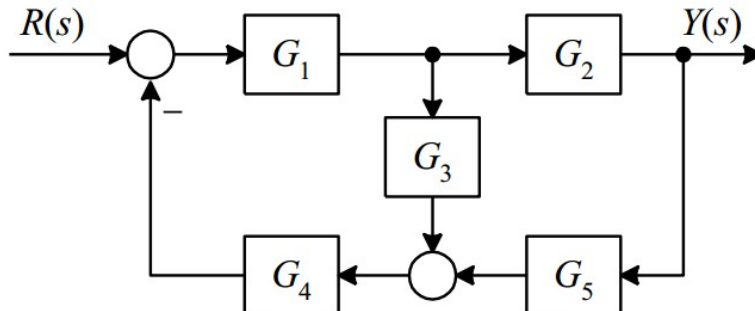
Rys. 6.9: Zad 5.10

3. Przekształcić schemat z Rys. 6.10



Rys. 6.10: Zadanie C1d

4. Przekształcić schemat z Rys. 6.11



Rys. 6.11: Zadanie C1i

7. Charakterystyki częstotliwościowe

Niech dany będzie liniowy obiekt dynamiczny jak na Rys. 7.1



Rys. 7.1: Obiekt dynamiczny

Jeśli jako wymuszenie dostarczamy sygnał harmoniczny (sinusoidalny)

$$u(t) = U_a [\cos \omega t + j \sin \omega t] = U_a e^{j\omega t} \quad (7.1)$$

to w **stanie ustalonym** uzyskamy odpowiedź również w postaci sygnału harmonicznego

$$y(t) = Y_a [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] = U_a e^{j(\omega t + \phi)} \quad (7.2)$$

gdzie: U_a , Y_a - amplituda sygnału, $\omega = 2\pi/T$ – pulsacja sygnału, T – okres sygnału, ϕ – przesunięcie fazy.

Sygnał odpowiedzi ma taką samą pulsację ω (ten sam okres T) jak sygnał wymuszenia, może różnić się amplitudą oraz może być przesunięty w fazie ϕ (opóźniony lub wyprzedzony).

Wprowadza się pojęcie **transmitancji widmowej** poprzez przyjęcie, że zmienna zespolona s posiada jedynie część urojoną czyli $s = j\omega$

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} \quad (7.3)$$

i jest ona równa stosunkowi zespolonej wartości odpowiedzi do zespolonej wartości wymuszenia harmonicznego w stanie ustalonym.

Można z niej wyodrębnić dwie części: moduł

$$|G(j\omega)| = A(\omega) = \frac{Y_a}{U_a} \quad (7.4)$$

oraz argument

$$\arg G(j\omega) = \phi(\omega) \quad (7.5)$$

Przedstawiając graficznie zależność

- modułu w funkcji pulsacji otrzymujemy **częstotliwościowa charakterystykę amplitudy**
- argumentu w funkcji pulsacji **częstotliwościowa charakterystykę fazy**.

Korzystając z modułu i argumentu transmitancję widmową można zapisać także

$$G(j\omega) = A(\omega) \cos \phi(\omega) + jA(\omega) \sin \phi(\omega) \quad (7.6)$$

oraz po prowadzeniu oznaczeń pomocniczych

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (7.7)$$

gdzie: $P(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)]$ a $Q(\omega) = \text{Im}[G(j\omega)]$.

Na podstawie (7.6) można stwierdzić, że :

$$P(\omega) = P(-\omega) \quad (7.8)$$

$$Q(\omega) = -Q(-\omega) \quad (7.9)$$

$P(\omega)$ jest funkcją parzystą ze względu na ω a $Q(\omega)$ jest funkcją nieparzystą ω .

Dodatkowo można zapisać:

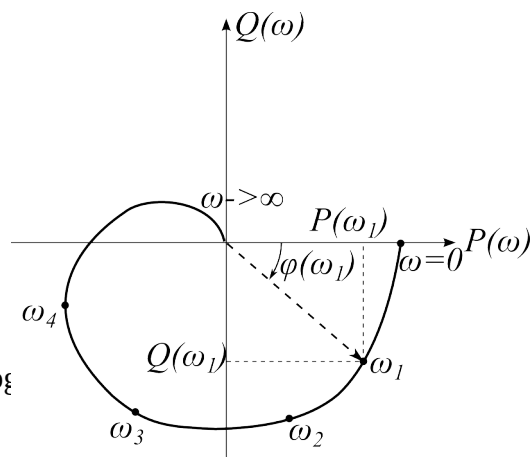
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (7.10)$$

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (7.11)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa (Nyquista)

Na podstawie (7.7) można wyznaczyć kolejne punkty na płaszczyźnie PQ dla pulsacji w przedziale od zera do nieskończoności co pokazano

1. Charakterystyki wykreślana jest na płaszczyźnie o osiach współrzędnych $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ Rys. 7.2
2. Dla zakresu zmienności ω od 0 do ∞ wykreślamy krzywą
3. Transmitancja widmowa to liczba zespolona więc poszczególne punkty
 1. można wyznaczyć obliczając ich współrzędne $P(\omega)$ i $Q(\omega)$
 2. są wyznaczane przez koniec wektora $A(\omega)$ nachylonego względem dodatniego kierunku osi odciętych $P(\omega)$ o kąt $\phi(\omega)$



Rys. 7.2: Charakterystyka Nyquista

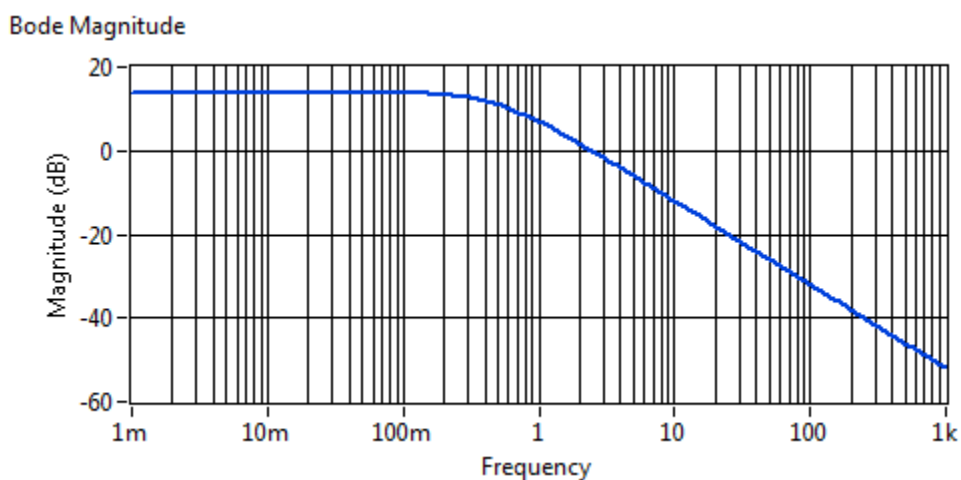
Charakterystyki logarytmiczne: amplitudowa i fazowa (Bodego)

Na podstawie wzorów (7.10) i (7.11) wprowadza się następujące wielkości

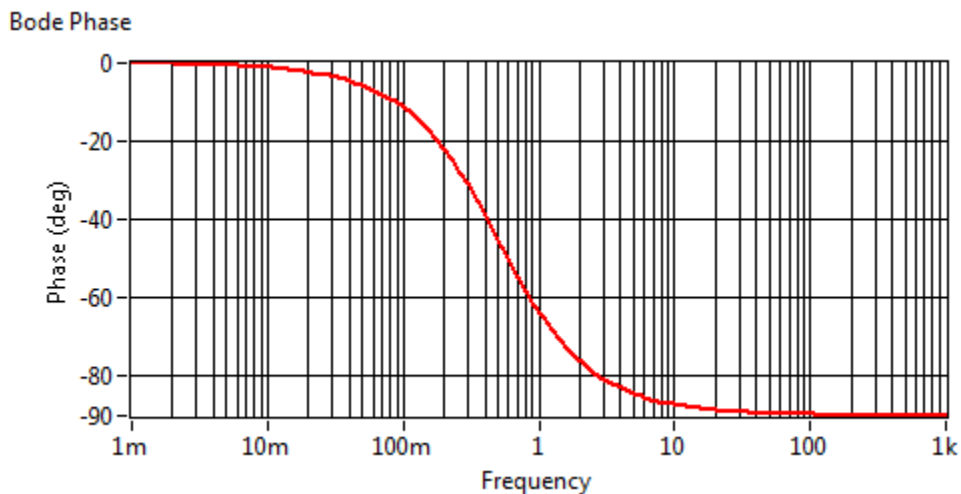
$$Lm(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} A(\omega) \quad [dB] \quad (7.12)$$

$$\phi(\omega) = \arg G(j\omega) \quad (7.13)$$

Charakterystyki logarytmiczne amplitudowa i fazowa powstają poprzez wyliczenie wielkości danych wzorami (7.12) i (7.13) dla ω od 0 do ∞ i wykreśleniu przy użyciu logarytmicznej skali pulsacji. Wykresy przedstawia się jeden pod drugi aby skale pulsacji pokrywały się tak jak na Rys. 7.3 i Rys. 7.4.



Rys. 7.3: Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa



W
przypadku

Katedra AutoRys. 7.4: Logarytmiczna charakterystyka fazowa

szeregowego łącenia bloków transmitancja wypadkowa równa jest iloczynowi transmitancji składowych

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \quad (7.14)$$

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1(\omega)}|G_2(j\omega)|e^{j\phi_2(\omega)} \quad (7.15)$$

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)G_2(j\omega)|e^{j[\phi_1(\omega)+\phi_2(\omega)]} \quad (7.16)$$

Ponieważ wykresy charakterystyk sporządzane są w skali logarytmicznej operację mnożenia zastępuje operacją dodawania

$$Lm(\omega) = 20 \log[|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|] = Lm_1(\omega) + Lm_2(\omega) \quad (7.17)$$

$$\phi(\omega) = \arg[G_1(j\omega)G_2(j\omega)] = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) \quad (7.18)$$

Charakterystyki logarytmiczne pozwalają łatwo wyznaczyć charakterystyki asymptotyczne (przybliżone)

Przykład

Dany jest obiekt inercyjny I-rzędu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} \quad (7.19)$$

aby wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe należy przejść z transmitancji operatorowej do transmitancji widmowej przez podstawienie $s=j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} \quad (7.20)$$

Następnie należy dokonać takich przekształceń aby otrzymać $G(j\omega)$ w postaci jak we wzorze (7.7). W pierwszej kolejności należy wyeliminować z mianownika część urojoną. W tym celu mnożymy licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną do mianownika.

$$G(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T} \quad (7.21)$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu

$$G(j\omega) = \frac{k(1-j\omega T)}{1+\omega^2 T^2} \quad (7.22)$$

i dalej

$$G(j\omega) = \frac{k}{1+\omega^2 T^2} + j \frac{-k\omega T}{1+\omega^2 T^2} \quad (7.23)$$

Wprowadzając oznaczenia $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ otrzymujemy

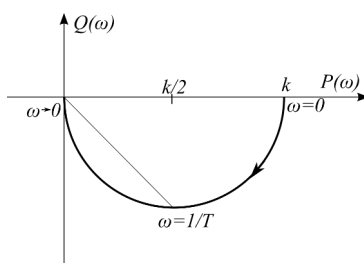
$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k \omega T}{1 + \omega^2 T^2} \quad (7.24)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa (Nyquista)

Następnie należy w układzie współrzędnych PQ narysować krzywą wyznaczaną przez punkty $(P(\omega), Q(\omega))$ dla ω od 0 do ∞ . W tym celu należy sporządzić tabelkę i wstawić obliczone wartości $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla $\omega=0$, $\omega=\infty$ oraz innych punktów.

ω	0	∞	$1/T$
$P(\omega)$	k	0	k/2
$Q(\omega)$	0	0	-k/2

Po wyznaczeniu niezbędnej liczby punktów można narysować charakterystykę amplitudowo-fazową (Nyquista)



Rys. 7.5: Ch-ka Nyquista

Logarytmiczne charakterystyki amplitudowa i fazowa (Bodego)

Korzystając z (7.10) oraz (7.24) dla rozważanego obiektu można zapisać

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{k^2 \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} \quad (7.25)$$

i dalej

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2(1 + \omega^2 T^2)}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} \quad (7.26)$$

i dalej

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)}} \quad (7.27)$$

po wstawieniu do (7.12) otrzymujemy

$$Lm(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)}} \right| \quad (7.28)$$

Analogicznie dla fazy wstawiamy z (7.24) do równania (7.11) i otrzymujemy

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{\frac{-k \omega T}{1 + \omega^2 T^2}}{\frac{k}{1 + \omega^2 T^2}} \quad (7.29)$$

a po przekształceniu

$$\phi(\omega) = \arctg(-\omega T) \quad (7.30)$$

Aby łatwiej było na rysować charakterystykę amplitudową można przekształcić wzór (7.28) korzystając w właściwości logarytmów

$$Lm(\omega) = 20 \log k - 20 \log (1 + \omega^2 T^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7.31)$$

i dalej

$$Lm(\omega) = 20 \log k - 10 \log (1 + \omega^2 T^2) \quad (7.32)$$

Dla małych wartości pulsacji drugi składnik jest mało istotny i rzeczywistą charakterystyką może być przybliżona **charakterystyką asymptotyczną** opisaną wzorem $Lm(\omega) = 20 \log k$ czyli poziomą prostą. Dla dużych pulsacji pierwszy składnik jest mało znaczący a drugi opisuje prostą o nachyleniu -20 dB/dek przy założeniu logarytmicznej skali pulsacji.

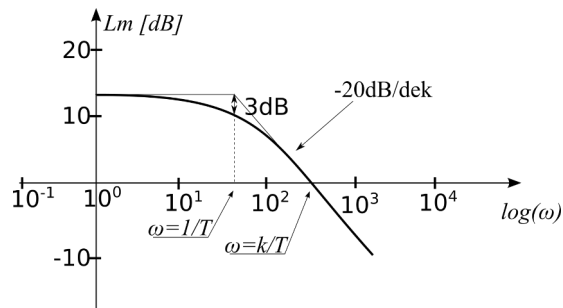
Wyjaśnienie

Dekada – 10 krotne zwiększenie wartości pulsacji

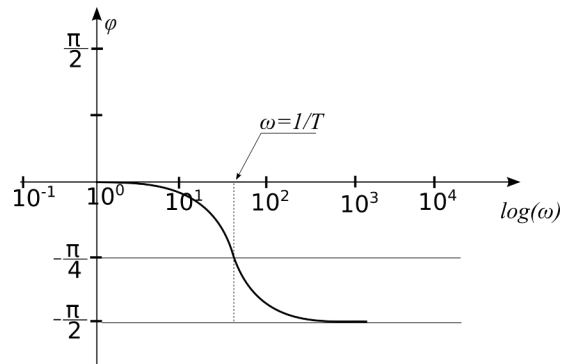
Oktawa – 2 krotne zwiększenie wartości pulsacji

Punkty wyznaczone przez równania (7.32) i (7.30) należy wykreślić używając logarytmicznej osi pulsacji dla ω od 0 do ∞ . W tym celu można posłużyć się tabelką.

ω	0	∞	1/T
$Lm(\omega)$	$20 \log k$	$-\infty$	-3
$\phi(\omega)$	0	$-\pi/2$	$-\pi/4$



Rys. 7.6: Ch-ka Bodego amplitudowa



Rys. 7.7: Ch-ka Bodego fazowa

Zadania

1. Korzystając z (7.24) wykazać analitycznie, że charakterystyka Nyquista obiektu inercyjnego I-rzędu jest półokręgiem.
2. Wykazać na podstawie (7.28), że logarytmiczna charakterystyka amplitudowa obiektu inercyjnego I-rzędu dla dużych pulsacji jest nachylona -20dB/dekadę
3. Wykazać na podstawie (7.28), że rozbieżność między charakterystyką rzeczywistą a asymptotyczną obiektu inercyjnego I-rzędu wynosi maksymalnie 3dB
4. Wykreślić charakterystykę Nyquista dla obiektu dwuinercyjnego o wzmacnieniu k i stałych czasowych T_1 i T_2 .
5. Wykreślić charakterystyki Bodego dla obiektu dwuinercyjnego o wzmacnieniu k i stałych czasowych T_1 i T_2 .
6. Wykazać, że logarytmiczna charakterystyka amplitudowa obiektu inercyjnego II-rzędu dla bardzo dużych pulsacji jest nachylona -40dB/dekadę

8. Stabilność

Intuicyjnie rozumiana stabilność bazuje najczęściej na pojęciu **stanu równowagi**. Mówimy, że obiekt jest stabilny jeśli po wytrąceniu go ze stanu równowagi przez jakieś działania zewnętrzne po zaniknięciu tych działań samoczynnie powraca do stanu równowagi. Zachodzi potrzeba zdefiniowania stanu równowagi. Intuicyjnie można go opisać jako stan, w którym „nic się nie dzieje” czyli nie występują zmiany wielkości opisujących dynamikę układu. Przy pomocy zmiennych stanu można to zapisać równaniem:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (8.1)$$

Stabilność rozpatruje się przy braku wymuszenia (**układ autonomiczny**) oraz dopuszcza się istnienie niezerowych warunków początkowych. Równanie stanu z uwzględnieniem powyższych założeń przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (8.2)$$

gdzie: $\mathbf{x}(t)$ – wektor zmiennych stanu, \mathbf{x}_0 – wektor warunków początkowych, \mathbf{A} – macierz stanu (macierz stałych współczynników [dla układów liniowych stacjonarnych] wynikających z budowy układu. Porównując (8.1) i (8.2) otrzymujemy:

$$0 = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (8.3)$$

Jeśli $\det \mathbf{A} \neq 0$ układ ma jeden punkt w przeciwnym wypadku ma ich wiele.

Punkt równowagi \mathbf{x}_r jest **punktem stabilnym** jeśli dla każdej dodatniej liczby ε można dobrać liczbę η taką, że trajektoria fazowa rozpoczynająca się od punktu \mathbf{x}_0 leżącym wewnątrz kuli o promieniu η pozostaje wewnątrz kuli o promieniu ε dla dowolnej chwili $t \geq 0$.

Jeśli dodatkowo zachodzi warunek $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r$ to punkt nazywamy **stabilnym asymptotycznie**.

Dla modelu wejście wyjście przedstawionego na Rys. 8.1



Rys. 8.1: Model wejście-
wyjście układu
dynamicznego

wygodniejsza jest definicja stabilności według Laplace’a. Mówi ona, że liniowy układ dynamiczny jest stabilny jeśli na **skończone wymuszenie generuje skończoną odpowiedź**.

Dynamikę takiego układu opisuje równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^{(m)} x(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} x(t)}{dt^{(m-1)}} + \dots + b_1 \frac{d x(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (8.4)$$

gdzie: x – sygnał wejściowy (wymuszenie) w postaci sygnału sterującego lub zakłócenia, y – sygnał wyjściowy (odpowiedź), a ; b – współczynniki wynikające z budowy fizycznej układu.

Rozwiązanie równanie (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) jest sumą rozwiązań (teoria równań różniczkowych)

$$y(t) = y_s(t) + y_w(t) \quad (8.5)$$

gdzie:

$y_s(t)$ to rozwiązanie ogólne równania (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) czyli z prawą stroną równą 0 – tzw. **składowa swobodna**

$y_w(t)$ to rozwiązanie szczególne równania (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) czyli pełnego równania – tzw. **składowa wymuszona**

Układ jest stabilny jeśli składowa swobodna $y_s(t)$ maleje do zera (def. Laplace'a) czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_s(t) = 0 \quad (8.6)$$

Aby zatem stwierdzić czy układ jest stabilny czy nie, należy znać rozwiązanie ogólne równania (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania).

Poddając równanie (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) z prawą stroną przyrównaną do zera, dwustronnej transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = 0 \quad (8.7)$$

po podzieleniu dwustronnym przez $Y(s)$ uzyskujemy tzw. **równanie charakterystyczne**

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (8.8)$$

Przekształcając równanie (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) można uzyskać transformatę Lapalce'a składowej swobodnej odpowiedzi

$$Y_s(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} \quad (8.9)$$

Jeśli s_1, s_2, \dots, s_n są pierwiastkami równania (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) to równanie (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) można przetransformować do dziedziny czasu (metodą rozkładu na

ułanki proste lub metodą residuów) co daje rozwiązanie ogólne czyli poszukiwaną składową swobodną (C_1, C_2, \dots, C_n – stałe)

$$y_s(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t} \quad (8.10)$$

Składowa swobodna dana wzorem (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) będzie się zachowywać zależnie od wartości poszczególnych pierwiastków równania charakterystycznego: s_1, s_2, \dots, s_n .

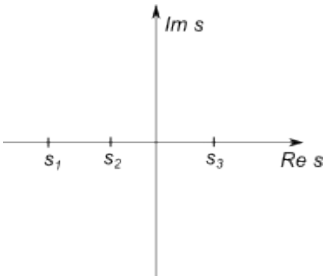
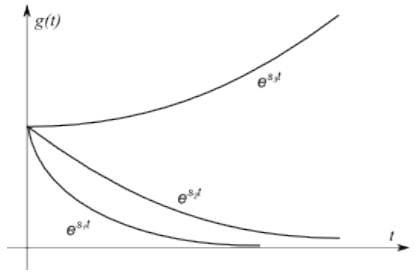
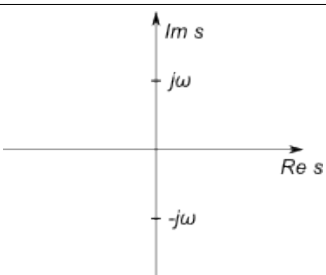
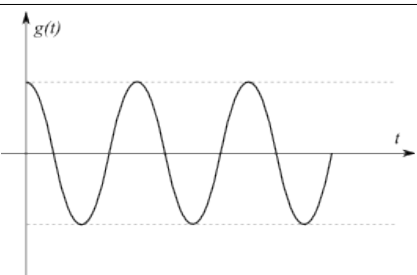
Wyprowadzając ze wzoru (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) transmitancję operatorową otrzymujemy

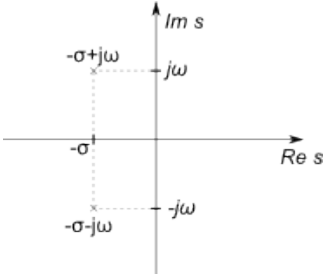
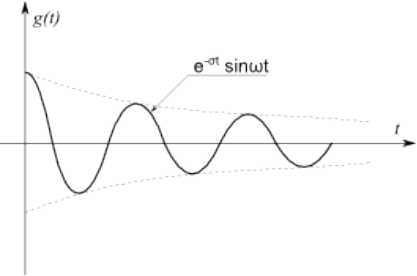
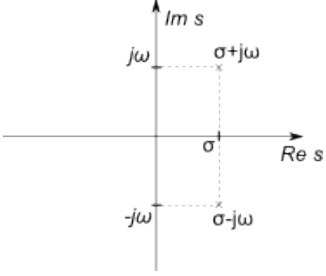
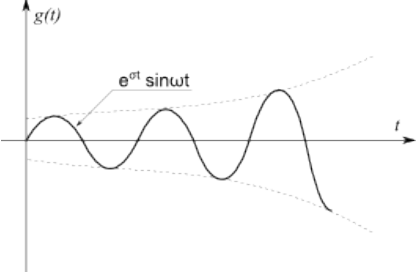
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_1 s + a_0} \quad (8.11)$$

Porównując wzory (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) i (Błąd: nie znaleziono źródła odwołania) można zauważyć, że równanie charakterystyczne to mianownik transmitancji operatorowej przyrównany do zera.

Pierwiastki równania charakterystycznego to **bieguny transmitancji**.

W tabeli przedstawiono wpływ biegunów transmitancji na stabilność układu.

Lp.	Pierwiastki	Położenie pierwiastków na płaszczyźnie s	Charakterystyka skokowa
1	<p>pierwiastki rzeczywiste $Re\ s \neq 0, Im\ s = 0$</p> <p>układ stabilny - s_1, s_2 niestabilny - s_3</p>		
2	<p>pierwiastki zespolone $Re\ s = 0, Im\ s \neq 0$</p> <p>układ na granicy stabilności</p>		

3	<p>pierwiastki zespolone $Re s < 0, Im s \neq 0$</p> <p>układ stabilny</p>		
4	<p>pierwiastki zespolone $Re s > 0, Im s \neq 0$</p> <p>układ niestabilny</p>		

Warunkiem koniecznym i wystarczającym aby układ był stabilny jest, aby wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego leżały po lewej stronie osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej s (ich części rzeczywiste były mniejsze od zera).

Oś urojona jest granicą stabilności.

Pierwiastki równania charakterystycznego (ich położenie względem osi urojonej) określone są przez postać lewej strony równania dynamiki układu więc stabilność

1. jest funkcją wyłącznie parametrów układu
2. nie zależy od charakteru wymuszenia

Stałe C_1, C_2, \dots, C_n zależą również od postaci prawej strony równania dynamiki więc charakter procesu przejściowego, a więc szybkość narastania lub zanikania sygnału zależy od parametrów wymuszenia ale nie przesądza to o stabilności układu.

Dla układów o dużym stopniu złożoności (wysoki stopień równania dynamiki) znajdowanie pierwiastków równania charakterystycznego jest kłopotliwe i czasochłonne dlatego sformułowane zostały kryteria (reguły/metody) pozwalające badać stabilność bez konieczności poszukiwania pierwiastków równania charakterystycznego.

Podział kryteriów stabilności

1. analityczne: Hurwitza, Routha
2. analityczno-graficzne: Michajłowa
3. graficzne: Nyquista, Nyquista logarytmiczne

Ad 1), 2) wymagają znajomości transmitancji operatorowej układu w postaci analitycznej

Ad 3) opierają się na charakterystykach częstotliwościowych, które można wykreślić analitycznie na podstawie znanego modelu matematycznego lub wyznaczyć eksperymentalnie bez znajomości analitycznego opisu układu

Ad 1) Można badać układy otwarte i zamknięte. kr. Hurwitza - pozwala stwierdzić czy układ jest stabilny czy nie, kr. Routha pozwala stwierdzić czy układ jest stabilny czy nie oraz jeśli nie jest stabilny ile pierwiastków równania charakterystycznego ma dodatnie części rzeczywiste.

Ad 3) Na podstawie przebiegu charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego pozwalają badać stabilność układu po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego

9. Stabilność – kryterium Hurwitza

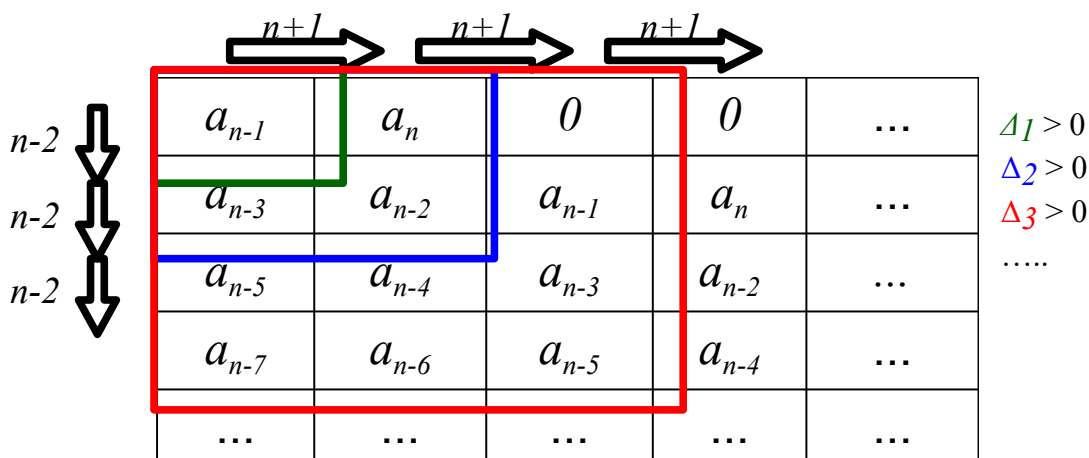
Równanie charakterystyczne układu (otwartego lub zamkniętego) ma postać

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (9.1)$$

Wszystkie współczynniki a_i są rzeczywiste.

Aby wszystkie pierwiastki tego równania leżały w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s muszą być spełnione warunki:

- 1) Warunek konieczny: wszystkie współczynniki a_i muszą mieć ten sam znak
 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \dots, a_n > 0$
- 2) Warunek konieczny i wystarczający: wszystkie podwyznaczniki Δ_i dla i od 0 do $n-1$ oraz wyznaczniki Δ_n muszą być dodatnie



Algorytm postępowania

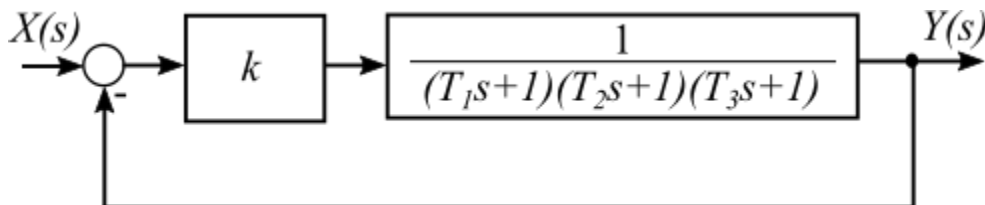
1. zapisać równanie charakterystyczne

2. sprawdzić czy wszystkie współczynniki występują i są dodatnie
3. zbudować tabelę wyznacznika głównego (brakujące współczynniki zastąpić zerem)
4. obliczyć wszystkie podwyznaczniki oraz wyznacznik główny
5. jeśli wszystkie podwyznaczniki oraz wyznacznik główny są dodatnie układ jest stabilny

Przykład

1. Dany jest układ składający się szeregowo połączonych członu proporcjonalnego o współczynniku wzmocnienia k oraz członu inercyjny III-rzędu o wzmocnieniu 1 i stałych czasowych T_1, T_2, T_3 . Całość zamknięta w pętli pełnego ujemnego sprzężenia zwrotnego. Przy pomocy kryterium Hurwitza wyznaczyć dla jakich wartości wzmocnienia $k > 0$ układ jest stabilny?

Schemat blokowy rozpatrywanego układu przedstawiony jest na Rys. 9.1



Rys. 9.1: Schemat blokowy układu

Aby przystąpić do badania stabilności przy pomocy kryterium Hurwitza należy uzyskać równanie charakterystyczne. W tym celu trzeba wyznaczyć transmitancję zastępczą całego układu. Jest to układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym zawierający w torze głównym dwa obiekty połączone szeregowo.

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \quad (9.2)$$

$$1 + \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

a po przekształceniu

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1) + k} \quad (9.3)$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu mianownika z (9.3) oraz przyrównaniu do zera otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\frac{T_1 T_2 T_3}{a_n} s^3 + \frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)}{a_{n-1}} s^2 + \frac{(T_1 + T_2 + T_3)}{a_{n-2}} s + \frac{1+k}{a_{n-3}} = 0 \quad (9.4)$$

Jest to równanie trzeciego stopnia ($n=3$)

1° Sprawdzenie warunku koniecznego

Czy wszystkie współczynniki równania charakterystycznego występują i są dodatnie (a dokładniej czy są jednakowego znaku)?

$$\begin{aligned}
a_n &= T_1 T_2 T_3 > 0 \\
a_{n-1} &= T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 > 0 \\
a_{n-2} &= T_1 + T_2 + T_3 > 0 \\
a_{n-3} &= 1 + k
\end{aligned}
\tag{9.5}$$

ponieważ stałe czasowe T_1, T_2, T_3 są dodatnie więc współczynniki a_n, a_{n-1}, a_{n-2} również są dodatnie.

Aby współczynnik a_{n-2} także był dodatni musi być spełniona nierówność

$$1 + k > 0 \tag{9.6}$$

Po jej rozwiązaniu otrzymujemy pierwszy warunek ($k > -1$) na k .

2° Sprawdzenie warunku koniecznego i wystarczającego

Należy zbudować tablicę Hurwitzta o wymiarach 3x3 (równanie stopnia $n=3$)

$$\begin{vmatrix}
T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 & T_1 T_2 T_3 & 0 \\
1 + k & T_1 + T_2 + T_3 & T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 \\
0 & 0 & 1 + k
\end{vmatrix}
\tag{9.7}$$

a następnie obliczyć poszczególne wyznaczniki.

Wyznacznik Δ_1

$$\Delta_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 \tag{9.8}$$

zawsze jest większy od zera bo T_1, T_2, T_3 są dodatnie.

Wyznacznik Δ_2

$$\Delta_2 = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - (1 + k)(T_1 T_2 T_3) \tag{9.9}$$

ma być większy od zera. Trzeba zatem rozwiązać poniższą nierówność ze względu na k

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - (1 + k)(T_1 T_2 T_3) > 0 \tag{9.10}$$

Można wymnożyć i rozwiązywać równanie 3-go stopnia ale zawsze warto spróbować rozwiązać problem wykorzystując proste przekształcenia. Po podzieleniu stronami przez $T_1 T_2 T_3$ otrzymujemy (nierówność nie zmienia znaku, bo $T_1 T_2 T_3 > 0$)

$$\frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3)}{(T_1 T_2 T_3)} - (1 + k) > 0 \tag{9.11}$$

po przeniesieniu k na prawą stronę

$$\frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3)}{(T_1 T_2 T_3)} - 1 > k \quad (9.12)$$

Po dalszych przekształceniach

$$k < \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1 \quad (9.13)$$

otrzymujemy kolejny warunek na wartość k .

Wyznacznik Δ_3

Wyznacznik należy policzyć dla całej macierzy zapisanej wzorem (9.7). Można użyć dowolnej metody np. Laplace'a. Aby uprościć obliczenia można skorzystać z reguły (schematu) metody Sarrusa, który pozwala obliczyć wyznacznik macierzy 3x3 niskim nakładem pracy. Należy przepisać z prawej strony macierzy dwie pierwsze jej kolumny (lub dwa pierwsze wiersze poniżej) a następnie liczyć jak wyznacznik macierzy 2x2 (iloczynu wzdłuż niebieskich linii z + a iloczynu wzdłuż czerwonych linii z -, część iloczynów będzie zerowa).

$$\begin{vmatrix} T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 & T_1 T_2 T_3 & 0 \\ 1+k & T_1 + T_2 + T_3 & T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 \\ 0 & 0 & 1+k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 & T_1 T_2 T_3 \\ T_1 + T_2 + T_3 & 1+k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 & T_1 T_2 T_3 \\ 1+k & T_1 + T_2 + T_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 & T_1 T_2 T_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (9.14)$$

Po odrzuceniu wyrazów o wartości 0 otrzymujemy:

$$\Delta_3 = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3)(1+k) - (1+k)^2(T_1 T_2 T_3) \quad (9.15)$$

Wyznacznik ten ma być dodatni więc zachodzi nierówność

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3)(1+k) - (1+k)^2(T_1 T_2 T_3) > 0 \quad (9.16)$$

Należy ją rozwiązać ze względu na k . Można wymnażać, dostajemy równanie kwadratowe, które po rozwiązaniu da nam poszukiwany warunek na k . Można też spróbować przekształcić aby dojść do rozwiązania mniejszym nakładem pracy. Wyłączmy przed nawias $(1+k)$

$$(1+k)[(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - (1+k)(T_1 T_2 T_3)] > 0 \quad (9.17)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym to wyznacznik Δ_2 , wzór (9.10). Jest on dodatni dla k spełniającego warunek (12) lub (9.13). Aby nierówność była spełniona człon $(1+k)$ musi być dodatni a to też jest spełnione i wynika ze sprawdzenia warunku koniecznego, wzory (9.5) i (9.6). Sprawdzenie wyznacznika 3 nie wnosi zatem żadnego warunku na wartość k . Rozwiązanie to suma warunków ze wzorów (9.6) i (9.13) czyli

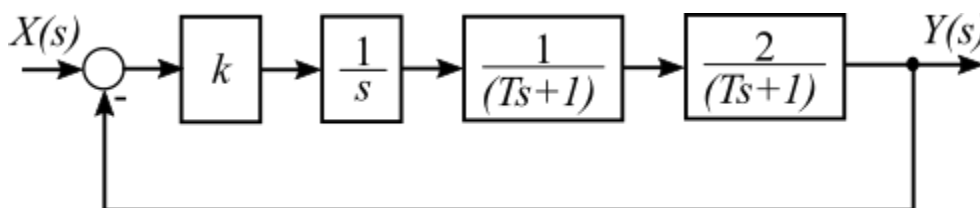
$$-1 < k < \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1 \quad (9.18)$$

Po uwzględnieniu warunków z zadania, że $k > 0$ odpowiedź można zapisać jako

$$0 < k < \left(\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1 \quad (9.19)$$

2. Dany jest układ z pełnym sprzężeniem zwrotnym zawierający w torze głównym połączone szeregowo: obiekt proporcjonalny o wzmacnieniu k , całkujący oraz dwa obiekty inercyjne o stałej czasowej $T=2s$, jeden z nich o wzmacnieniu 1 a drugi o wzmacnieniu 2. Dla jakich $k > 0$ układ jest stabilny? Przedstawić graficznie $k=f(T)$.

Schemat blokowy układu opisanego w zadaniu przedstawiony jest na Rys. 9.2



Rys. 9.2: Schemat blokowy układu z przykładu 2

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego

$$G(s) = \frac{\frac{2k}{s(Ts+1)^2}}{1 + \frac{2k}{s(Ts+1)^2}} \quad (9.20)$$

a po przekształceniu

$$G(s) = \frac{2k}{s(Ts+1)^2 + 2k} \quad (9.21)$$

Mianownik transmitancji po przyrównaniu do zera daje równanie charakterystyczne

$$s(T^2 s^2 + 2Ts + 1) + 2k = 0 \quad (9.22)$$

a po przekształceniu

$$T^2 s^3 + 2Ts^2 + s + 2k = 0 \quad (9.23)$$

1° Sprawdzenie warunku koniecznego

Czy wszystkie współczynniki równania charakterystycznego występują i są dodatnie (a dokładniej czy są jednakowego znaku)?

$$a_n = T^2 > 0 \text{ bo } T > 0, a_{n-1} = 2T > 0, a_{n-2} = 1 > 0, a_{n-3} = 2k > 0 \text{ dla } k > 0 \quad (9.24)$$

Otrzymujemy pierwszy warunek na k

$$k > 0 \quad (9.25)$$

2° Sprawdzenie warunku koniecznego i wystarczającego

Należy zbudować tablicę Hurwitz'a o wymiarach 3x3 (równanie stopnia $n=3$)

$$\begin{vmatrix} 2T & T^2 & 0 \\ 2k & 1 & 2T \\ 0 & 0 & 2k \end{vmatrix} \quad (9.26)$$

Wyznacznik Δ_1

$$\Delta_1 = 2T \quad (9.27)$$

jest zawsze większy od zera, bo T jest zawsze dodatnie.

Wyznacznik Δ_2

$$\Delta_2 = 2T - 2kT^2 \quad (9.28)$$

po wyłączeniu $2T$ przed nawias

$$\Delta_2 = 2T(1 - kT) \quad (9.29)$$

Aby podwyznacznik Δ_2 dany wzorem (9.29) był dodatni wyrażenie $1 - kT$ musi być dodatnie z czego wynika, że

$$k < \frac{1}{T} \quad (9.30)$$

Jest to kolejny warunek na k . (Poprzedni zapisany ze wzorze (9.25))

Wyznacznik Δ_3

Ponieważ macierz jest wymiaru 3x3 można zastosować regułę Sarrusa. Wzór (9.31) przedstawia macierz z dopisanymi odpowiednimi wierszami

$$\begin{vmatrix} 2T & T^2 & 0 \\ 2k & 1 & 2T \\ 0 & 0 & 2k \\ 2T & T^2 & 0 \\ 2k & 1 & 2T \end{vmatrix} \quad (9.31)$$

Poszukiwany wyznacznik po odrzuceniu zerowych składników można zapisać:

$$\Delta_3 = 4kT - 4k^2T^2 \quad (9.32)$$

Po wyłączeniu $4kT$ otrzymujemy

$$\Delta_3 = 4kT(1 - kT) \quad (9.33)$$

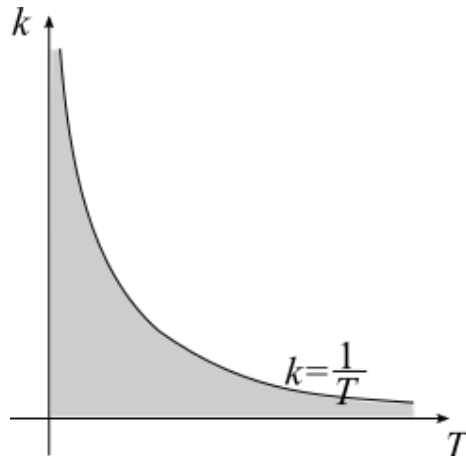
Wyznacznik Δ_3 jest dodatni gdy wyrażenie $1 - kT$ jest dodatnie czyli

$$k < \frac{1}{T} \quad (9.34)$$

Biorąc pod uwagę wszystkie warunki jakie otrzymaliśmy (9.25), (9.30) i (9.34) oraz warunki zadania

$$0 < k < \frac{1}{T} \quad (9.35)$$

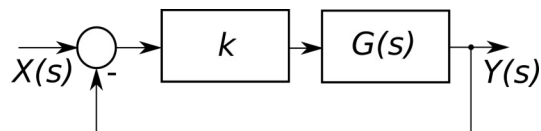
Graficznie odpowiedź przedstawiona jest na Rys. 9.3. Układ jest stabilny gdy wartość wzmacnienia k leży w zacieniowanym obszarze.



Rys. 9.3: Odpowiedź do przykładu 2

Zadania

1. Dla UAR (Układ Automatycznej Regulacji) składającego się z regulatora proporcjonalnego o wzmacnieniu $k > 0$ oraz obiektu o transmitancji $G(s)$ i schemacie blokowym pokazanym na Rys. 9.4



Rys. 9.4: Schemat blokowy UAR

Wyznaczyć dla jakich wartości k układ jest stabilny.

a)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad (9.36)$$

(Odpowiedź: $k < 16$)

b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} \quad (9.37)$$

(Odpowiedź: $k < 32$)

c)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+4)} \quad (9.38)$$

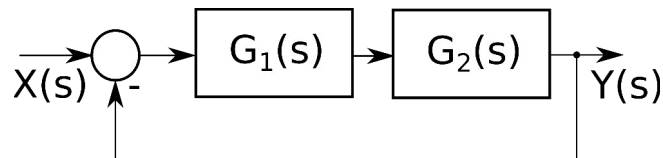
(Odpowiedź: $k < 24$)

d)

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+3)} \quad (9.39)$$

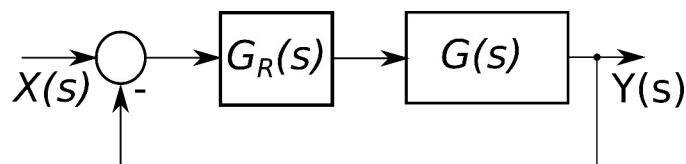
(Odpowiedź: $k < 60$)

2. Dla układu przedstawionego na sprawdzić czy jest on stabilny



$$G_1(s) = \frac{2}{s(1+0.1s)} \quad G_2(s) = \frac{5}{1+0.5s} \quad (9.40)$$

3. Dla układu UAR przedstawionego na Rys. 9.5 składającego się z regulatora i obiektu



Rys. 9.5: Schemat blokowy układu UAR

gdzie: $G_R(s) = \frac{1}{T_c s}$ i $G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ (9.41)

wyznaczyć dla jakich wartości T_c układ jest stabilny (Odpowiedź: $T_c > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$)

10. Stabilność – kryterium Nyquista

1. Należy do **graficznych** metod badania stabilności układu.
2. Pozwala badać **stabilność zamkniętego** układu regulacji automatycznej na podstawie przebiegu **charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego**.

Możliwe przypadki

1. Układ otwarty stabilny

Układ zamknięty regulacji automatycznej **jest stabilny** jeżeli **charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$** dla pulsacji ω zmieniającej się od 0 do ∞ .

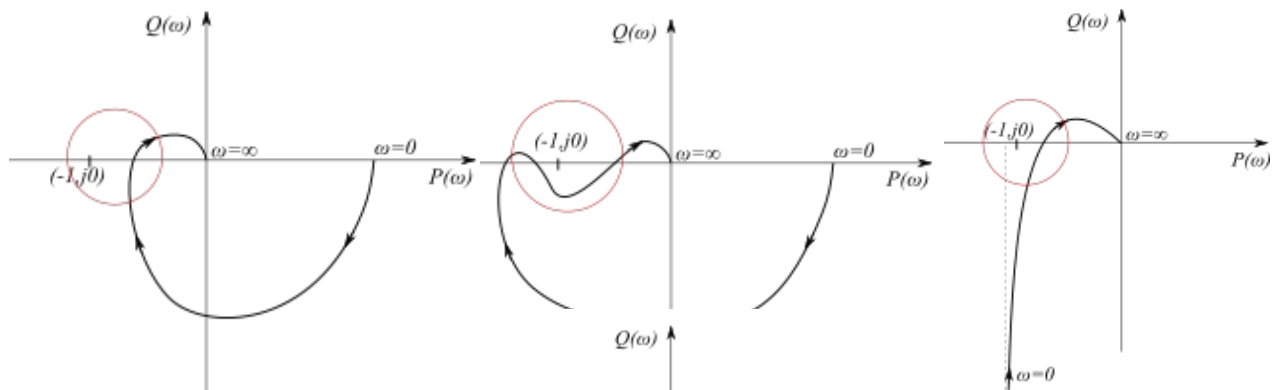
- a) Układy strukturalnie stabilne - stabilne niezależnie od ich parametrów
- b) Układy strukturalnie niestabilne – strukturalnie niezależnie od ich parametrów

2. Układ otwarty niestabilny

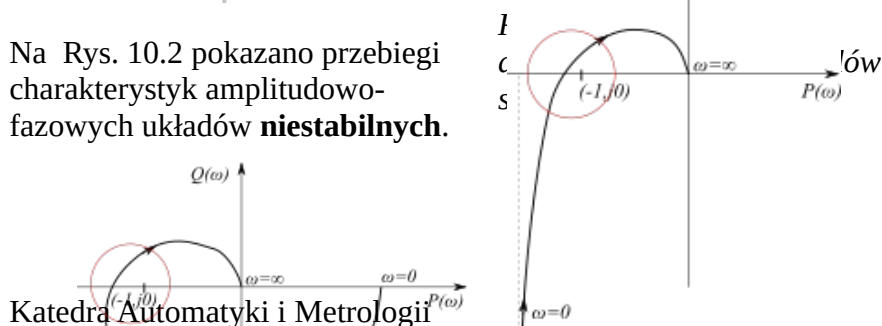
Jeżeli układ otwarty jest niestabilny, a jego równanie charakterystyczne posiada m pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s to po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie on stabilny jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego okrąży m razy punkt $(-1, j0)$ dla pulsacji ω zmieniającej się od $-\infty$ do ∞ .

k_{kr} – **krytyczny współczynnik wzmocnienia** (charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego **przechodzi przez punkt $(-1, j0)$** , układ jest na granicy stabilności)

Na Rys. 10.1 pokazano przebiegi charakterystyk amplitudowo-fazowych układów **stabilnych**



Na Rys. 10.2 pokazano przebiegi charakterystyk amplitudowo-fazowych układów **niestabilnych**.



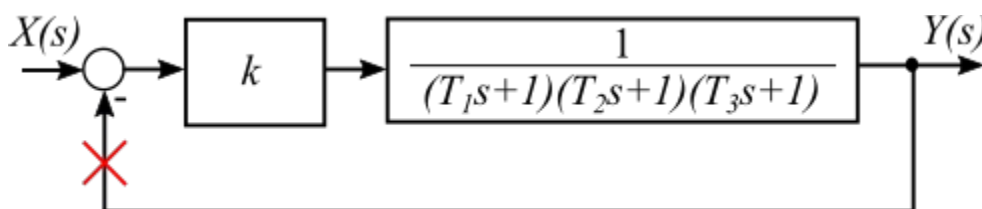
Rys. 10.2:
Charakterystyki
amplitudowo-fazowe
układów niestabilnych

Algorytm postępowania

Krok	Układ otwarty stabilny	Układ otwarty niestabilny
1	sprawdzić stabilność układu otwartego	
2	-	określić liczbę biegunów m w prawej półpłaszczyźnie
3	wykreślić charakterystykę amplitudowo-fazową dla pulsacji ω od 0 do ∞	wykreślić charakterystykę amplitudowo-fazową dla pulsacji ω od $-\infty$ do ∞
4	sprawdzić czy charakterystyka obejmuje punkt $(-1, j0)$	sprawdzić czy charakterystyka okrąży m razy punkt $(-1, j0)$
5	określić stabilność układu zamkniętego	określić stabilność układu zamkniętego

Przykład

1. Dany jest układ składający się szeregowo połączonych członu proporcjonalnego o współczynniku wzmocnienia k oraz członu inercyjny III-rzędu o wzmocnieniu 1 i stałych czasowych $T_1=1$ s, $T_2=2$ s, $T_3=3$ s. Całość zamknięta w pętli pełnego ujemnego sprzężenia zwrotnego. Przy pomocy kryterium Nyquista wyznaczyć dla jakich wartości wzmocnienia $k>0$ układ jest stabilny?



Rys. 10.3: Schemat układu z Przykładu 1

Na Rys. 10.3 pokazano schemat układu. Czerwonym znacznikiem oznaczono miejsce „przerwania” pętli sygnału sprzężenia zwrotnego.

Transmitancja operatorowa tak powstałego układu otwartego

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \quad (10.1)$$

Aby wykreślić charakterystykę amplitudowo-fazową należy przejść z transmitancji operatorowej na transmitancję widmową stosując podstawienie $s = j\omega$.

$$G(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} \quad (10.1)$$

Po podstawieniu wartości i wykonaniu przekształceń

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 - 11\omega^2 + j6\omega(1 - \omega^2)} \quad (10.2)$$

mnożymy mianownik przez liczbę sprzężoną (a także i licznik)

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 - 11\omega^2 + j6\omega(1 - \omega^2)} \frac{1 - 11\omega^2 - j6\omega(1 - \omega^2)}{1 - 11\omega^2 + j6\omega(1 - \omega^2)} \quad (10.3)$$

Po przekształceniu oraz rozdzieleniu na część rzeczywistą i urojoną

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{k(1 - 11\omega^2)}{[1 - 11\omega^2]^2 + 36\omega^2[(1 - \omega^2)]^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{6k\omega(\omega^2 - 1)}{[1 - 11\omega^2]^2 + 36\omega^2[(1 - \omega^2)]^2}}_{Q(\omega)} \quad (10.4)$$

Teraz w układzie współrzędnych PQ należy wykreślić krzywą o składowych $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla ω zmieniającego się od 0 do ∞ .

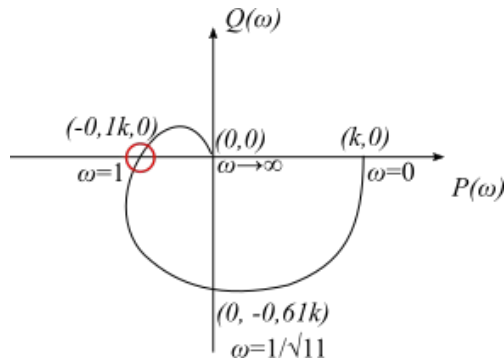
ω	0	∞	$1/\sqrt{11}$	1
$P(\omega)$	k	0	0	-0,1k
$Q(\omega)$	0	0	-0,61k	0

Dwa pierwsze punkty (kolumna 1 i 2) dla $\omega=0$ oraz $\omega=\infty$ uzyskujemy podstawiając ω wzoru (10.4). Kolejne uzyskujemy szukając takich wartości ω przy których odpowiednio $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ są równe zero co odpowiada punktom przecięcia w osiami układu współrzędnych (10.5), (10.6)

$$P(\omega)=0 \Leftrightarrow (1 - 11\omega^2)=0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow Q(\omega) \approx -0,61k \quad (10.5)$$

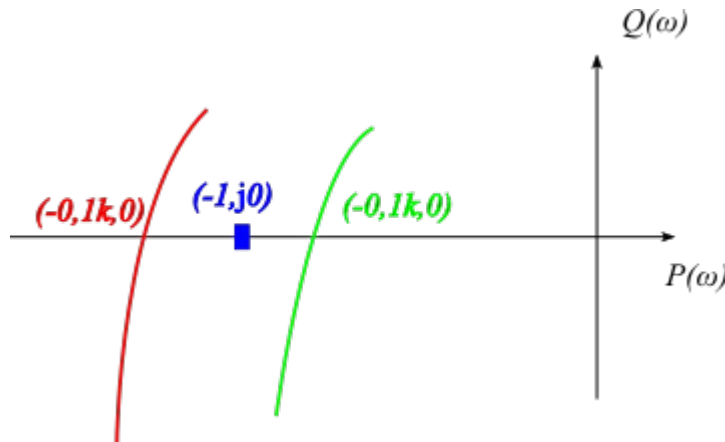
$$Q(\omega)=0 \Leftrightarrow (\omega^2 - 1)=0 \Rightarrow \omega = 1 \Rightarrow P(\omega) = -\frac{k}{10} \quad (10.6)$$

Na podstawie tabeli można naszkicować przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej Rys. 10.4



Rys. 10.4: Ch-ka amplitudowo-fazowa. Przykład 1.

Należy zbadać położenie punktu przecięcia charakterystyki w oś P (zaznaczony czerwonym kółkiem). W powiększeniu pokazuje to Rys. 10.5



Rys. 10.5: Powiększony fragment ch-ki amplitudowo-fazowej. Przykład 1.

Jeśli charakterystyką będzie przebiegać jak czerwona na Rys. 10.5 czyli będzie otaczać punkt $(-1, j0)$ więc układ po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie niestabilny. Jeśli będzie przebiegać tak jak zielona to nie będzie otaczać punktu $(-1, j0)$ więc układ po zamknięciu będzie stabilny. Aby układ zamknięty pozostał stabilny punkt przecięcia ch-ki amplitudowo-fazowej z osią P musi leżeć po prawej stronie punktu $(-1, j0)$ co można zapisać nierównością

$$\frac{-k}{10} > -1 \quad (10.7)$$

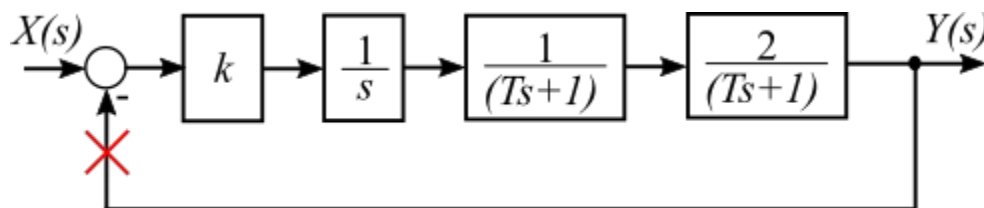
Po przekształceniu otrzymujemy

$$k < 10 \quad (10.8)$$

2. Dany jest układ z pełnym sprzężeniem zwrotnym zawierający w torze głównym połączone szeregowo: obiekt proporcjonalny o wzmacnieniu k , całkujący oraz dwa obiekty inercyjne o stałej

czasowej $T=2$ s, jeden z nich o wzmacnieniu 1 a drugi o wzmacnieniu 2 . Dla jakich $k>0$ układ jest stabilny?

Schemat blokowy układu opisanego w zadaniu przedstawiony jest na



Rys. 10.6: Schemat blokowy układu z przykładu 2.

Transmitancja operatorowa układu otwartego

$$G(s) = \frac{2k}{s(Ts+1)^2} \quad (10.9)$$

Transmitancja widmowa

$$G(j\omega) = \frac{2k}{j\omega(1+j\omega T)^2} \quad (10.10)$$

Po pomnożeniu mianownika (oraz licznika) przez $j\omega$ oraz liczbę sprzężoną

$$G(j\omega) = \frac{2k}{j\omega(1+j\omega T)^2} \frac{j\omega(1-j\omega T)^2}{j\omega(1-j\omega T)^2} \quad (10.11)$$

oraz po przekształceniu

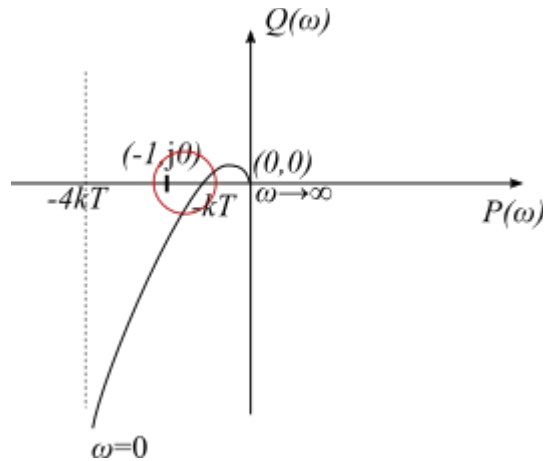
$$G(j\omega) = \frac{-4kT}{j\omega(1+\omega^2 T^2)^2} + j \frac{-2k(1-\omega^2 T^2)}{j\omega(1+\omega^2 T^2)^2} \quad (10.12)$$

Pierwszy składnik we wzorze (10.12) to $P(\omega)$, drugi $Q(\omega)$.

Następnie należy wyznaczyć przebieg ch-ki amplitudowo-fazowe. W tym celu wyznaczamy wartości $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla $\omega=0$ i $\omega \rightarrow \infty$ oraz poszukujemy ewentualnych punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych [$Q(\omega)=0$, $\omega=1/T$, $P(\omega=1/T) = -kT$]. Wszystkie te dane są zebrane w tabelce poniżej.

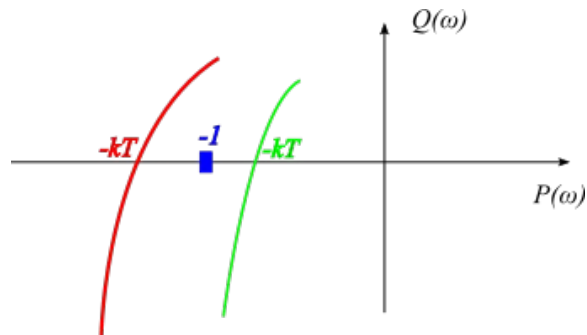
ω	0	∞	1/T
$P(\omega)$	$-4kT$	0	$-kT$
$Q(\omega)$	$-\infty$	0	0

Na tej podstawie można wykreślić charakterystykę amplitudowo-fazową Rys. 10.7



Rys. 10.7: Ch-ka amplitudowo-fazowa układu z przykładu 2

Na Rys. 10.8 pokazano w powiększeniu przebieg ch-ki w otoczeniu punktu $(-1, j0)$



Rys. 10.8: Przebieg ch-ki amplitudowo-fazowej w otoczeniu punktu $(-1, j0)$

Aby układ był stabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego charakterystyka amplitudowo-fazowa musi przecinać oś $P(\omega)$ po prawej stronie punktu $(-1, j0)$ [przebieg zielony] co można zapisać

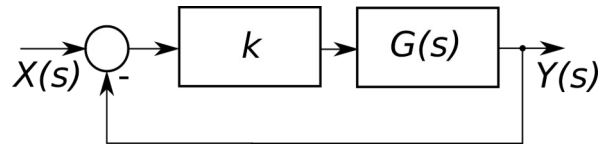
$$-kT > -1 \quad (10.13)$$

A po przekształceniu

$$k < \frac{1}{T} \quad (10.14)$$

Zadania

1. Dla UAR (Układ Automatemnej Regulacji) składającego się z regulatora proporcjonalnego o wzmacnieniu $k > 0$ oraz obiektu o transmitancji $G(s)$ i schemacie blokowym pokazanym na Rys. 10.9



Rys. 10.9: Schemat blokowy UAR

Wyznaczyć dla jakich wartości k układ jest stabilny.

a)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad (10.15)$$

(Odpowiedź: $k < 16$)

b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} \quad (10.16)$$

(Odpowiedź: $k < 32$)

c)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+4)} \quad (10.17)$$

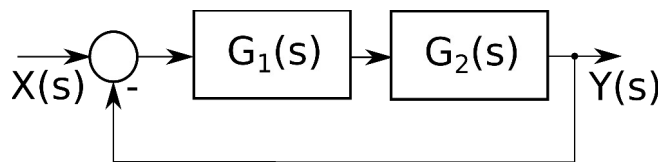
(Odpowiedź: $k < 24$)

d)

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+3)} \quad (10.18)$$

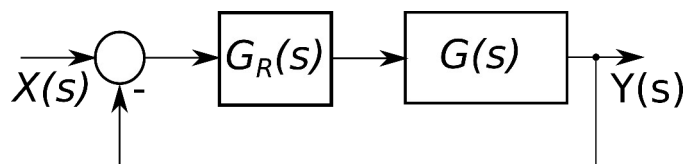
(Odpowiedź: $k < 60$)

2. Dla układu przedstawionego na sprawdzić czy jest on stabilny



$$G_1(s) = \frac{2}{s(1+0.1s)} \quad G_2(s) = \frac{5}{1+0.5s} \quad (10.19)$$

3. Dla układu UAR przedstawionego na Rys. 10.10 składającego się z regulatora i obiektu



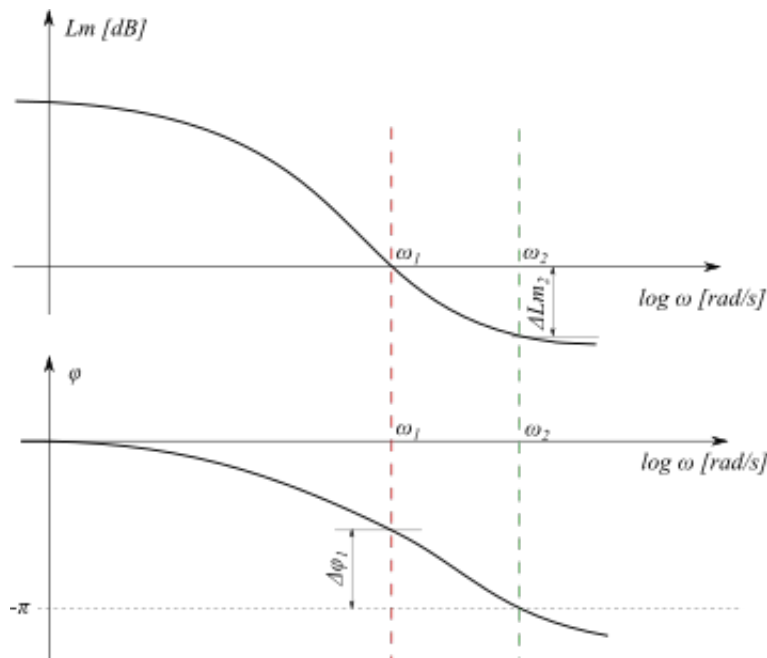
Rys. 10.10: Schemat blokowy układu UAR

gdzie: $G_R(s) = \frac{1}{T_c s}$ i $G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ (10.20)

wyznaczyć dla jakich wartości T_c układ jest stabilny (Odpowiedź: $T_c > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$)

11. Kryterium Nyquista Logarytmiczne

Kryterium Nyquista logarytmiczne pozwala ocenić stabilność układu zamkniętego na podstawie przebiegu częstotliwościowych logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej (charakterystyk Bodego) układu otwartego. Podobnie jak przy kryterium Nyquista badamy układ otwarty i na tej podstawie wnioskujemy o stabilności układu po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego.



Rys. 11.1: Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe amplitudowa i fazowa

Układ **zamknięty jest stabilny** jeśli logarytmiczna **charakterystyka amplitudowa** układu otwartego posiada wartość **ujemną dla pulsacji** odpowiadającej przesunięciu fazowemu $-\pi$.

Algorytm postępowania

1. wykreślić logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową (ch-ki Bodego)
2. na charakterystyce fazowej odnaleźć pulsację ω_2 dla której przesunięcie fazy wynosi $-\pi$

3. z charakterystyki amplitudowej dla w/w pulsacji określić wartość $Lm(\omega_2)$
4. jeśli odczytana wartość Lm jest mniejsza od zera układ po zamknięciu będzie stabilny

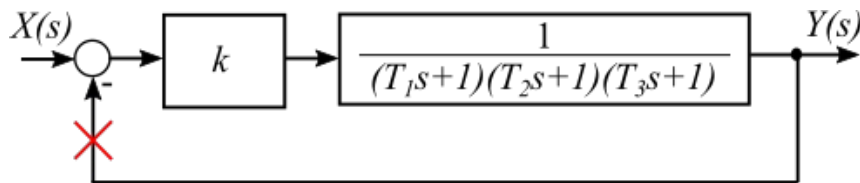
Można również postąpić inaczej.

Wyznaczyć wartość pulsacji ω_1 dla której $Lm(\omega_1)$ osiąga wartość zero. Następnie z charakterystyki fazowej odczytać przesunięcie fazy $\phi(\omega_2)$. Jeśli będzie ono większe od $-\pi$ to układ po zamknięciu będzie stabilny.

Przykład

1. Dany jest układ składający się szeregowo połączonych członu proporcjonalnego o współczynniku wzmocnienia k oraz członu inercyjny III-rzędu o wzmocnieniu 1 i stałych czasowych $T_1=1$ s, $T_2=2$ s, $T_3=3$ s. Całość zamknięta w pętli pełnego ujemnego sprzężenia zwrotnego. Przy pomocy logarytmicznego kryterium Nyquista wyznaczyć dla jakich wartości wzmocnienia $k>0$ układ jest stabilny?

Na Rys. 11.2 pokazano schemat układu.



Rys. 11.2: Schemat układu z Przykładu 1

Transmitancja układu otwartego operatorowa dana jest wzorem

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \quad (11.1)$$

transmitancja widmowa

$$G(j\omega) = \frac{k}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \quad (11.2)$$

Po podstawieniu wartości i przekształceniach otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{k(1-11\omega^2)}{\underbrace{(1-11\omega^2)^2+36\omega^2(1-\omega^2)^2}_{P(\omega)}} + j \frac{-6k\omega(1-\omega^2)}{\underbrace{(1-11\omega^2)^2+36\omega^2(1-\omega^2)^2}_{Q(\omega)}} \quad (11.3)$$

Należy znaleźć taką pulsację dla, której przesunięcie fazowe wynosi $-\pi$.

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (11.4)$$

Dla rozpatrywanego układu wzór (11.4) przyjmuje postać:

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{-6k\omega(1-\omega^2)}{k(1-11\omega^2)} \quad (11.5)$$

Poszukujemy wartości ω aby był spełniony warunek

$$\phi(\omega) = -\pi \Rightarrow \operatorname{tg} \phi(\omega) = 0 \quad (11.6)$$

Biorąc pod uwagę (11.5) i (11.6) można zapisać

$$-6k\omega(1-\omega^2) = 0 \quad (11.7)$$

Z tego wynika, że poszukiwana pulsacja $\omega=1$.

Wzmocnienie logarytmiczne wyraża wzór

$$Lm(\omega) = 20 \log \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad (11.8)$$

a rozpatrywanego układu

$$Lm(\omega) = 20 \log k \sqrt{\frac{(1-11\omega^2)^2 + 36k^2\omega^2(1-\omega^2)^2}{[(1-11\omega^2)^2 + 36\omega^2(1-\omega^2)^2]^2}} \quad (11.9)$$

po przekształceniu

$$Lm(\omega) = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-11\omega^2)^2 + 36\omega^2(1-\omega^2)^2}} \quad (11.10)$$

Po podstawieniu wartości ω ($\omega=1$), dla której występuje przesunięcie fazowe $-\pi$ otrzymujemy

$$Lm(\omega) = 20 \log \frac{k}{10} \quad (11.11)$$

Aby układ był stabilny musi zachodzić warunek

$$Lm(\omega) < 0 \quad (11.12)$$

Dla naszego układu to jest

$$20 \log \frac{k}{10} < 0 \quad (11.13)$$

$$\log \frac{k}{10} < 0 \quad (11.14)$$

$$10^{(\log \frac{k}{10})} < 10^0 \quad (11.15)$$

po wykorzystaniu własności logarytmów

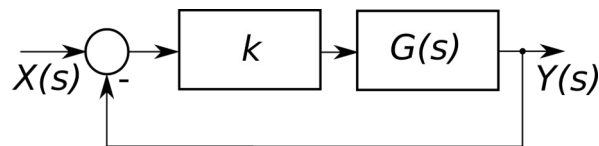
$$\frac{k}{10} < 1 \quad (11.16)$$

Rozwiązanie to

$$k < 10 \quad (11.17)$$

Zadania

1. Dla UAR (Układ Automatemycznej Regulacji) składającego się z regulatora proporcjonalnego o wzmacnieniu $k > 0$ oraz obiektu o transmitancji $G(s)$ i schemacie blokowym pokazanym na Rys. 11.3



Rys. 11.3: Schemat blokowy UAR

wyznaczyć przy pomocy logarytmicznego kryterium Nyquista zakres wartości k dla których układ jest stabilny.

a)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad (11.18)$$

(Odpowiedź: $k < 16$)

b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} \quad (11.19)$$

(Odpowiedź: $k < 32$)

c)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+4)} \quad (11.20)$$

(Odpowiedź: $k < 24$)

d)

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+3)} \quad (11.21)$$

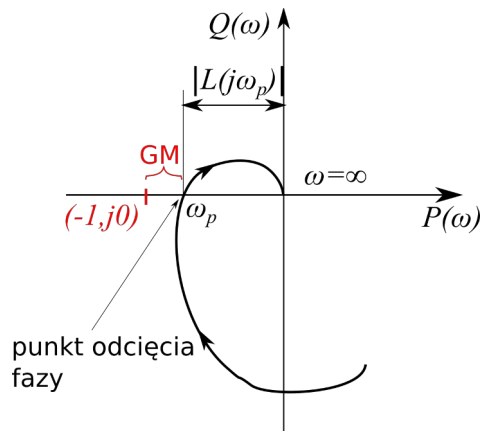
(Odpowiedź: $k < 60$)

12. Zapas stabilności

Zapasy stabilności wyrażony jest przy pomocy dwóch składowych: zapasu wzmocnienia oraz zapasu fazy.

Zapasy wzmocnienia

Konieczne jest wprowadzenie pojęcia **punkt odcięcia fazy**. Jest to taki punkt, w którym przesunięcie fazowe wynosi π . Na charakterystyce amplitudowo-fazowej (Nyquista) jest to punkt przecięcia tej charakterystyki w oś $P(\omega)$. Pulsacja w tym punkcie to ω_p . (pulsacja graniczna fazy). Na Rys. 12.1 pokazano przebieg przykładowej charakterystyki.



Rys. 12.1: Graficzna ilustracja zapasu wzmocnienia

Zapasy wzmocnienia (ang. **Gain Margin**) można zapisać

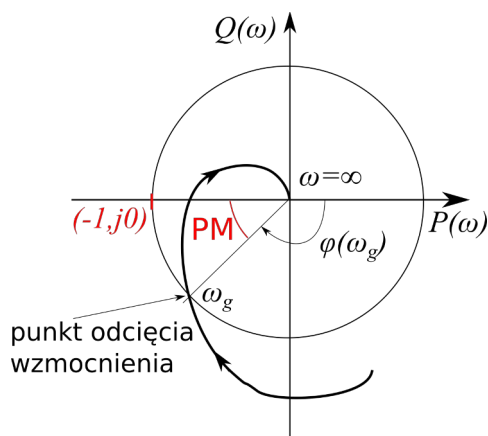
$$GM[\text{dB}] = 20 \log \frac{1}{|L(j\omega_p)|} = -20 \log |L(j\omega_p)| \quad (12.1)$$

Wnioski:

Lp.	Charakterystyka amplitudowo-fazowa	GM [dB]	Skutki
1	przechodzi przez punkt $(-1, j0)$	0	Układ na granicy stabilności
2	przecina oś $P(\omega)$ między punktem $(-1, j0)$ a początkiem układu współrzędnych [charakterystyka nie obejmuje punktu $(-1, j0)$]	>0	Można zwiększyć wzmocnienie o maks. GM dB
3	obejmuje punktu $(-1, j0)$	<0	Układ niestabilny, trzeba zmniejszyć wzmocnienie
4	nie przecina osi $P(\omega)$	∞	Układ zawsze stabilny, Teoretycznie wzmocnienie można zwiększać bez

Zapas fazy

Konieczne jest wprowadzenie pojęcia **punkt odcięcia wzmocnienia**. Moduł wartości modułu wzmocnienia wynosi 1. Na charakterystyce amplitudowo-fazowej (Nyquista) jest to punkt przecięcia tej charakterystyki z okręgiem o promieniu 1. Pulsacja w tym punkcie to ω_g (pulsacja graniczna wzmocnienia). Na Rys. 12.2 pokazano przebieg przykładowej charakterystyki.



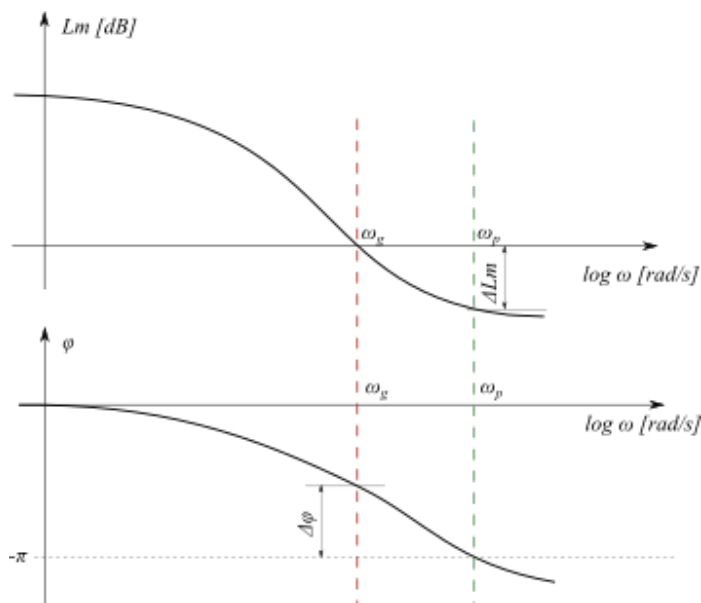
Rys. 12.2: Graficzna ilustracja zapasu fazy

Zapas fazy (ang. *Phase Margin*) można zapisać

$$PM = 180^\circ - \phi(\omega_g) = \pi - \phi(\omega_g) \quad (12.1)$$

Znane wartości zapasu wzmocnienia i fazy pozwalają ocenić jak daleko od granicy stabilności znajduje się analizowany układ. Ma to wpływ na właściwości dynamiczne UAR, np. na oscylacyjność. Ponadto przy projektowaniu rzeczywistego układu należy uwzględnić np. wpływ warunków zewnętrznych na parametry elementów oraz zjawisko starzenia się elementów (parametry poszczególnych elementów mogą się zmieniać z upływem czasu). Przy przyjęciu zbyt małego zapasu wzmocnienia i fazy UAR może po pewnym czasie pracy zmienić swoje własności dynamiczne a nawet w skrajnych przypadkach stać się niestabilny.

Do wyznaczenia zapasu wzmocnienia i zapasu fazy można również wykorzystać logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe. Na Rys. 12.3 przedstawiono przykładowe charakterystyki obiektu dynamicznego.



Rys. 12.3: Wykorzystanie logarytmicznych charakterystyk częstotliwościowych do wyznaczenia zapasu stabilności.

ω_g – pulsacja odcięcia wzmocnienia

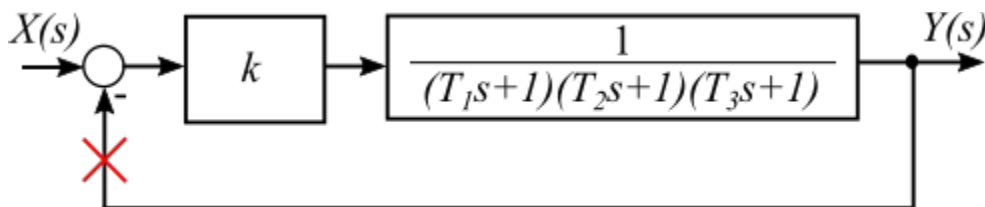
ω_p – pulsacja odcięcia fazy

$\Delta\varphi$ – zapas fazy

ΔLm – zapas wzmocnienia

Przykład

1. Dany jest układ składający się z szeregowo połączonych członów: proporcjonalnego o współczynniku wzmocnienia k oraz członu inercyjny III-rzędu o wzmocnieniu 1 i stałych czasowych $T_1=1$ s, $T_2=2$ s, $T_3=3$ s. Całość zamknięta w pętli pełnego ujemnego sprzężenia zwrotnego. Znaleźć takie $k>0$ aby a) zapas wzmocnienia wynosił 6dB, b) zapas fazy wynosił 30° ($\pi/6$).



Rys. 12.4: Schemat układu z Przykładu 1

Na Rys. 12.4 pokazano schemat układu opisanego słownie powyżej.

Transmitancja układu otwartego operatorowa dana jest wzorem

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \quad (12.2)$$

transmitancja widmowa

$$G(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} \quad (12.3)$$

Po podstawieniu wartości i przekształceniach otrzymujemy

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{k(1 - 11\omega^2)}{(1 - 11\omega^2)^2 + 36\omega^2(1 - \omega^2)^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-6k\omega(1 - \omega^2)}{(1 - 11\omega^2)^2 + 36\omega^2(1 - \omega^2)^2}}_{Q(\omega)} \quad (12.4)$$

Rozwiązanie przy pomocy charakterystyki amplitudowo-fazowej

Charakterystyka amplitudowo fazowa została wykreślona w „Stabilność- Kryterium Nyquista”,

a) Zapas wzmocnienia

Na podstawie tabelki oraz Rys. 4 z tego dokumentu wiemy, że odcięcie fazy następuje przy $\omega_p = 1$.

Współrzędna punktu przecięcia ch-ki z osią $P(\omega)$ czyli $P(\omega_p) = 0,1k$.

Zapas wzmocnienia zgodnie z (14.1)

$$GM[\text{dB}] = 20 \log \frac{1}{|P(\omega_p)|} = -20 \log |P(\omega_p)| = -20 \log |-0,1k| \quad (12.5)$$

Zapas ten ma być równy 6dB

$$-20 \log (0,1k) = 6 \quad (12.6)$$

$$\log (0,1k) = -0,3 \quad (12.7)$$

$$10^{\log(0,1k)} = 10^{-0,3} \quad (12.8)$$

Korzystając z własności logarytmów

$$0,1k = 0,5 \quad (12.9)$$

Rozwiązanie

$$k = 5 \quad (12.10)$$

b) Zapas fazy

Należy znaleźć wartość pulsacji odcięcia wzmocnienia ω_p . Można to uzyskać rozwiązując równanie

$$\sqrt{P^2(\omega_g)+Q^2(\omega_g)}=1 \quad (12.11)$$

Jest to warunek przecięcia się charakterystyki amplitudowo-fazowej z okręgiem o promieniu 1. Dla tak otrzymanej pulsacji obliczamy przesunięcie fazowe

$$\phi(\omega_g)=\text{arctg} \frac{Q(\omega_g)}{P(\omega_g)} \quad (12.12)$$

i obliczamy zapas fazy z wzoru (12.1)

Niestety po drodze napotykamy mocno skomplikowane obliczenia (konieczność rozwiązania równania algebraicznego wyższego stopnia). Należałoby zastosować rozwiązywanie numeryczne.

Rozwiązanie przy pomocy logarytmicznych charakterystyk amplitudowej i fazowej

Wzmocnienie logarytmiczne oraz faza w funkcji pulsacji wyrażają wzory

$$Lm(\omega)=20 \log \sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)} \quad (12.13)$$

$$\phi(\omega)=\text{arc tg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (12.14)$$

Dla rozpatrywanego układu

$$Lm(\omega)=20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-11\omega^2)^2+36\omega^2(1-\omega^2)^2}} \quad (12.15)$$

$$\phi(\omega)=\text{arc tg} \frac{-6k\omega(1-\omega^2)}{k(1-11\omega^2)} \quad (12.16)$$

a) Zapas wzmocnienia

Pulsacja odcięcia fazy spełnia warunek

$$\phi(\omega_g)=-\pi \Rightarrow \text{tg}(\phi(\omega_g))=0 \quad (12.17)$$

uwzględniając (12.16) i (12.17) otrzymujemy

$$\frac{-6k\omega_p(1-\omega_p^2)}{k(1-11\omega_p^2)}=0 \quad (12.18)$$

$$-6k\omega_p(1-\omega_p^2)=0 \quad (12.19)$$

stąd otrzymujemy pulsację odcięcia fazy $\omega_p=1$.

Dla takiej pulsacji mamy mieć zadany zapas wzmocnienia 6 dB. Na podstawie Rys. 12.3 można to zapisać w postaci wzoru:

$$\Delta Lm(\omega_p) = -6 \quad (12.20)$$

dla rozpatrywanego układu po uwzględnieniu (12.15)

$$20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-11\omega_p^2)^2 + 36\omega_p^2(1-\omega_p^2)^2}} = -6 \quad (12.21)$$

po podstawieniu pulsacji odcięcia fazy $\omega_p=1$

$$20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-11)^2}} = -6 \quad (12.22)$$

$$20 \log \frac{k}{\sqrt{100}} = -6 \quad (12.23)$$

$$\log \frac{k}{10} = -0,3 \quad (12.24)$$

$$\frac{k}{10} = 0,5 \quad (12.25)$$

Odpowiedź:

$$k = 5 \quad (12.26)$$

b) Zapas fazy

Należy rozwiązać równanie

$$20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-11\omega^2)^2 + 36\omega^2(1-\omega^2)^2}} = 0 \quad (12.27)$$

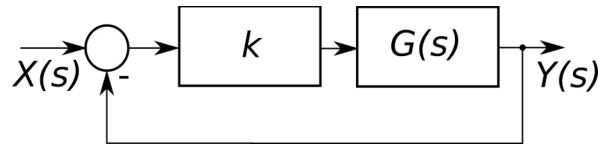
ze względu na ω . Otrzymamy wówczas pulsację odcięcia wzmocnienia ω_g . Wstawiając ją do wzoru (12.18) otrzymujemy poszukiwany zapas fazy

$$\phi(\omega_g) = \frac{-6k\omega_g(1-\omega_g^2)}{k(1-11\omega_g^2)} \quad (12.28)$$

Ponownie otrzymujemy skomplikowane obliczenia (równanie algebraiczne wysokiego rzędu). Można zastosować metodę graficzną czyli wykreślić dokładne charakterystyki logarytmiczne i odczytać z nich poszukiwane wartości lub rozwiązywać numerycznie.

Zadania

1. Dla UAR (Układ Automatycznej Regulacji) składającego się z regulatora proporcjonalnego o wzmocnieniu $k > 0$ oraz obiektu o transmitancji $G(s)$ i schemacie blokowym pokazanym na Rys. 12.5



Rys. 12.5: Schemat blokowy UAR

Wyznaczyć zapas wzmocnienia i fazy dla $k=0,5k_{kr}$.

a)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad (12.29)$$

b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} \quad (12.30)$$

c)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+4)} \quad (12.31)$$

d)

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+3)} \quad (12.32)$$

13. Układ automatycznej regulacji

Sterowanie - świadome, kontrolowane oddziaływanie na proces fizyczny, mające na celu uzyskanie wymaganego przebiegu tego procesu.

Układ sterowania – zespół współdziałających ze sobą urządzeń, który realizuje proces fizyczny oraz sterowanie jego przebiegiem.

Układ sterowania składa się z

1. **obiektu sterowanego** w którym zachodzi dany proces fizyczny
2. urządzenia sterującego (**regulatora**) wytwarzającego sygnały sterujące przebiegiem procesu.

Ze względu na sposób powiązania w/w elementów

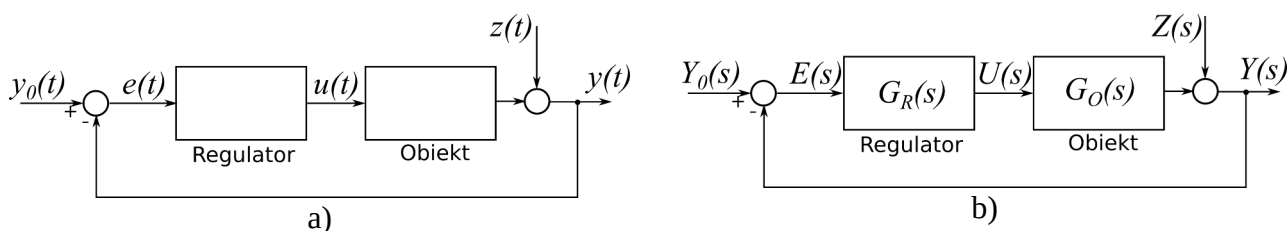
1. sterowanie w **układzie otwartym** - sterowanie
2. sterowanie w **układzie zamkniętym** - regulacja

Regulacja jest szczególnym przypadkiem sterowania.

W odniesieniu do układu regulacji poszczególne nazwy (w porównaniu z nazwami w układzie sterowania) będą więc następujące:

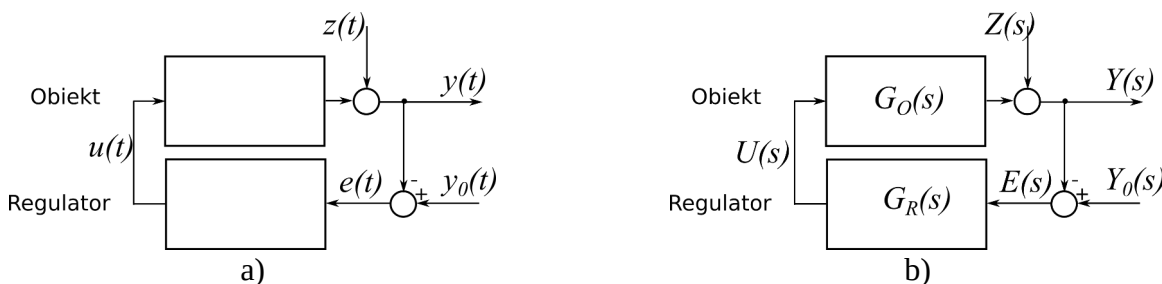
- zamknięty układ sterowania - układ regulacji ,
- obiekt - obiekt regulowany,
- sygnał sterowany - sygnał regulowany,
- urządzenie sterujące – regulator

Schemat układu automatycznej regulacji został przedstawiony na Rys. 13.1



Rys. 13.1: Typowy schemat UAR a) w dziedzinie czasu, b) w dziedzinie zmiennej s

Czasami spotyka alternatywną wersję schematu pokazaną na



Rys. 13.2: Alternatywna wersja schematu UAR a) w dziedzinie czasu, b) w dziedzinie zmiennej zespolonej s

Nazewnictwo i oznaczenia sygnałów

Lp.	Sygnał		
	Nazwa	Symbol	Symbol transformaty Laplace'a
1	Zadany	$y_0(t)$	$Y_0(s)$
2	Regulowany	$y(t)$	$Y(s)$
3	Uchyb regulacji	$e(t)$	$E(s)$
4	Regulujący	$u(t)$	$U(s)$
5	Zakłócenia	$z(t)$	$Z(s)$

Związki między sygnałami

Transmitancja układu otwartego przy braku zakłóceń

$$K(s) = G_R(s)G_o(s) \quad (13.1)$$

Transmitancja układu zamkniętego przy braku zakłóceń

$$G(s) = \frac{G_R(s)G_o(s)}{1 + G_R(s)G_o(s)} \quad (13.2)$$

Uchyb

$$E(s) = Y_o(s) - Y(s) \quad (13.1)$$

Sygnał regulujący

$$U(s) = E(s)G_R(s) \quad (13.2)$$

Wprowadza się także pojęcia:

Transmitancja uchybowa

$$G_u(s) = \left. \frac{E(s)}{Y_o(s)} \right|_{Z(s)=0} \quad (13.3)$$

W przypadku układu o schemacie przedstawionym na Rys. 13.1 a)

$$G_u(s) = \frac{1}{1 + K(s)} \quad (13.4)$$

Transmitancja zakłóceńowa

$$G_z(s) = \left. \frac{Y(s)}{Z(s)} \right|_{Y_o(s)=0} \quad (13.5)$$

W przypadku układu o schemacie przedstawionym na Rys. 13.1 a)

$$G_z(s) = \left. \frac{1}{1 + K(s)} \right|_{Y_o(s)=0} \quad (13.6)$$

Opis przebiegu procesu regulacji w analogowym układzie regulacji automatycznej

1. Dzięki sprzężeniu zwrotnemu wartości wielkości regulowanej $y(t)$ (sygnał regulowany) jest dostarczana do węzła sumacyjnego (bardzo często węzeł ten jest częścią regulatora)
2. Sygnał regulowany $y(t)$ (tzn. jego aktualna wartość) jest porównywany z sygnałem zadany $y_0(t)$, (określającym wymaganą w procesie sterowania wartość wielkości $y(t)$)
3. Różnica tych sygnałów $e(t)=y_0(t)-y(t)$ (tzw. uchyb regulacji) jest przetwarzana w regulatorze na sygnał regulujący $u(t)$
4. Regulator wypracowuje sygnał regulujący (sterujący) $u(t)$ w taki sposób aby zapewnić wymagany przebieg wielkości regulowanej $y(t)$, niezależnie od zakłóceń $z(t)$ i zmian parametrów
5. Rolą regulatora jest aby w każdej chwili czasu dążyć do zrównania wielkości regulowanej $y(t)$ z aktualną wartością $y_0(t)$, czyli dążyć do wyzerowania uchybu regulacji
6. Powyższe powinno być osiągnięte w możliwie krótkim czasie i z zachowaniem innych warunków

Klasyfikacja za względu na zadania

- 1) Układ **stabilizacji**
Sygnał sterujący y_0 ma stałą wartość ($y_0=\text{const.}$) Układ ma za zadanie utrzymać stałą wartość sygnału regulowanego y
- 2) Układ **nadążny**
Sygnał y_0 jest nieznaną funkcją czasu. Układ ma za zadanie utrzymać wartość sygnału regulowanego y **podążając** za y_0 .
- 3) Układ **programowy**
Sygnał y_0 zmienia się według pewnego algorytmu
- 4) Układ **ekstremalny**
Podczas zmiany y_0 sygnał y osiąga ekstremum, którego położenie nie jest stałe. Zadaniem UAR jest utrzymanie układu w pobliżu ekstremum.

Grupy kryteriów dobroci (wskaźników jakości) UAR:

1. Stabilność układu - należy zapewnić odpowiedni zapas modułu i fazy, jest to podstawowy wymóg stawiany układowi automatycznej regulacji (często jedynym celem zastosowania „układu automatyki na obiekcie” jest ustabilizowanie jego pracy)
2. Dokładność statyczna określa stopień osiągania przez układ wartości zadanej po ustaniu procesów przejściowych (docelowo uchyb regulacji w stanie ustalonym $e_{st}=0$)
3. Zapewnienie pożądaných własności dynamicznych określanych za pomocą szeregu wskaźników odnoszących się do poszczególnych cech przebiegu przejściowego wybranego sygnału (najczęściej odpowiedzi skokowej od wymuszenia lub zakłócenia).

Regulatory

Regulator typu P (proporcjonalny) opisany jest równaniem

$$u(t) = K_p e(t) \quad (13.7)$$

oraz transmitancją operatorową

$$G_r(s) = K_p \quad (13.8)$$

gdzie: K_p – współczynnik wzmocnienia

$$\frac{1}{K_p} - \text{zakres proporcjonalności} \quad (13.9)$$

Zakres proporcjonalności wyrażony w procentach określa procentowy zakres zmian sygnału wejściowego przy którym sygnał wyjściowy zmienia się w pełnym zakresie tzn. o 100%

Regulator typu I (całkujący)

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (13.10)$$

$$G_r(s) = \frac{1}{T_i s} \quad (13.11)$$

gdzie: T_i – czas zdwojenia

Regulator typu PI (proporcjonalno-całkujący)

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i s} \int_0^t e(\tau) d\tau \right] \quad (13.12)$$

$$G_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (13.13)$$

gdzie: K_p – współczynnik wzmocnienia, T_i – czas zdwojenia

Dla $t = T_i$ $h(t) = 2K_p$. Po czasie równym T_i składowa $h(t)$, będąca wynikiem działania całkującego regulatora jest równa składowej pochodzącej od działania proporcjonalnego tego regulatora. Sygnał łączny po czasie T_i jest więc dwukrotnie większy i stąd pochodzi nazwa „czas zdwojenia”.

Regulator typu PD (proporcjonalno-różniczkujący)

$$u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (13.14)$$

$$G_r(s) = K_p (1 + T_d s) \quad (13.15)$$

K_p – współczynnik wzmocnienia

T_d - czas wyprzedzenia (stała czasowa różniczkowania).

Czas wyprzedzenia T_d – jest to czas po upływie którego, w przypadku podania na wejście regulatora PD sygnału narastającego liniowo, sygnał związany z działaniem proporcjonalnym zrówna się z sygnałem pochodzącym od działania różniczkującego

Regulator typu PD rzeczywisty

$$T \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K_p \left[e(t) + (T + T_d) \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (13.16)$$

$$G_r(s) = K_p \left[1 + \frac{T_d s}{T s + 1} \right] \quad (13.17)$$

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i s} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right] \quad (13.18)$$

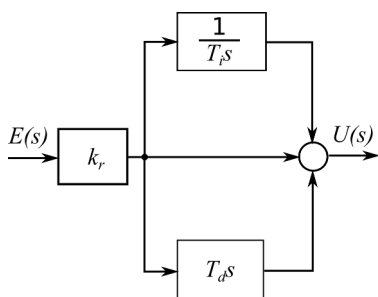
$$G_r(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (13.19)$$

Regulator typu PID rzeczywisty (proporcjonalno-różniczkująco-całkujący)

$$T T_i \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + T_i \frac{du(t)}{dt} = K_p \left[e(t) + (T + T_i) \frac{de(t)}{dt} + T_i (T + T_d) \frac{d^2 e(t)}{dt^2} \right] \quad (13.20)$$

Modele regulatora PID

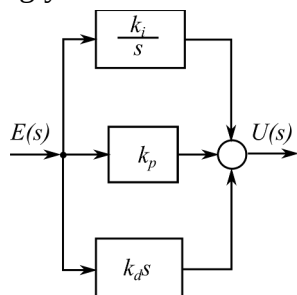
1) akademicki



$$G_{PID}(s) = k_r \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (13.21)$$

$$u(t) = k_r e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (13.22)$$

2) równoległy

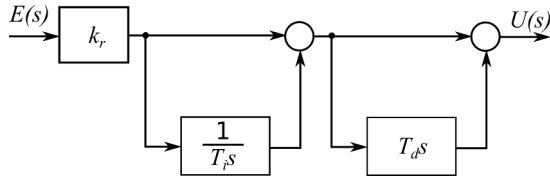


$$G_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (13.23)$$

(13.

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (24)$$

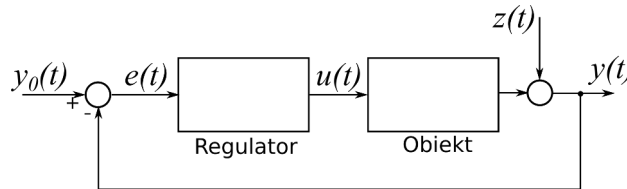
3) szeregowy



$$G_{PID}(s) = k_r \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) (1 + T_d s) \quad (13.25)$$

$$u(t) = e(t) \quad (13.26)$$

14. Dokładność statyczna



Rys. 14.1: Schemat typowego UAR

Dokładność statyczna określa stopień osiągnięcia przez układ wartości zadanej po ustaniu procesów przejściowych (docelowo uchyb regulacji w stanie ustalonym $e_u=0$)
Można to zapisać równaniem

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (14.1)$$

Chcąc wyznaczyć wartość uchybu ustalonego należy funkcję opisującą wartość uchybu w czasie. Aby tego uniknąć można wykorzystać twierdzenie „o wartości końcowej”

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad (14.2)$$

dla uchybu ustalonego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \quad (14.3)$$

$$E(s) = Y_0(s) G_u(s) \quad (14.4)$$

Dla typowego UAR składającego się w torze głównym z regulatora i obiektu o pełnym sprzężeniu zwrotnym

$$G_u(s) = \frac{1}{1+K(s)} \quad (14.5)$$

gdzie: $K(s)$ to transmitancja układu otwartego.

Ze wzoru (14.4) wynika, że wartość uchybu ustalonego zależy od sygnału wymuszenia oraz właściwości układu

Ze względu na wartość uchybu ustalonego w odpowiedzi na sygnał skokowy wyróżniamy

- 1) Układy statyczny o transmitancji operatorowej układu otwartego danej wzorem ogólnym

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (14.6)$$

dla których uchyb ustalony proporcjonalny do wartości wymuszenia skokowego

- 2) Układ astatyczne o transmitancji operatorowej układu otwartego danej wzorem ogólnym

$$K(s) = \frac{L(s)}{s^l M(s)} \quad (14.7)$$

dla których uchyb ustalony dla wymuszenia skokowego równy jest zero (l – stopień astatyzmu)

Wartości uchybów ustalonych dla układów różnego typu oraz dla różnych wymuszeń podane są w poniższej tabeli

Typ układu	K(s) transmitancja układu otwartego	Współczynnik wzmocnienia układu otwartego	Wymuszenie		
			Skokowe $A_0 \mathbf{1}(t)$	Liniowe $A_1 t \mathbf{1}(t)$	Paraboliczne $A_2 t^2 \mathbf{1}(t)$
			e_s uchyb statyczny	e_{vs} uchyb prędkościowy	e_{as} uchyb przyspieszeniowy
statyczny	$\frac{L_0(s)}{M_0(s)} \quad (14.8)$	k - współczynnik wzmocnienia statycznego	$\frac{A_0}{1+k} \quad (14.9)$	∞	∞
astatyczny I - rzędu	$\frac{L_0(s)}{sM_0(s)} \quad (14.10)$	k_v - współczynnik wzmocnienia prędkościowego	0	$\frac{A_1}{k_v} \quad (14.11)$	∞
astatyczny II - rzędu	$\frac{L_0(s)}{s^2 M_0(s)} \quad (14.11)$ 2)	k_a - współczynnik wzmocnienia przyspieszeniowego	0	0	$\frac{2 A_2}{k_a} \quad (14.13)$

Przykład

Dla UAR składającego się z regulatora proporcjonalnego o wzmacnieniu k i obiektu dynamicznego o transmitancji

$$G_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad (14.14)$$

z pętlą pełnego sprzężenia zwrotnego wyznaczyć dla jakich wartości wzmacnienia $k > 0$ uchyb ustalony jest mniejszy od 30% wartości ustalonej sygnału regulowanego dla wymuszenia $3 \cdot \mathbf{1}(t)$.

Z warunków zadania mamy

$$e_u < 0,3 y_u \quad (14.15)$$

Uchyb ustalony można obliczyć (tw. o wartości końcowej) ze wzoru

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (14.16)$$

Transformatę Laplace'a uchybu można wyznaczyć ze wzoru

$$E(s) = G_u(s) Y_0(s) \quad (14.17)$$

gdzie: $G_u(s)$ to transmitancja uchybowa a $Y_0(s)$ transformata Laplace'a wymuszenia

$$G_u(s) = \frac{1}{1+K(s)} \quad (14.18)$$

$$Y_0(s) = \frac{3}{s} \quad (14.19)$$

gdzie: $K(s)$ – transmitancja układu otwartego dla analizowanego przypadku

$$K(s) = \frac{k}{(s+1)(s^2+2s+5)} \quad (14.20)$$

Wartość ustaloną sygnału wyjściowego można wyznaczyć (tw. o wartości końcowej) ze wzoru

$$y_u = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) \quad (14.21)$$

Transformatę Laplace'a sygnału wyjściowego można wyznaczyć

$$Y(s) = G(s) Y_0(s) \quad (14.22)$$

gdzie: $G(s)$ to transmitancja układu zamkniętego

$$G(s) = \frac{G_R(s)G_o(s)}{1+G_R(s)G_o(s)} \quad (14.23)$$

Podstawiają kolejno (14.20) i (14.18), następnie (14.18) i (14.19) do (14.17) i na koniec (14.17) do (14.16) otrzymujemy

$$e_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k}{(s+1)(s^2+2s+5)}} \frac{3}{s} \quad (14.24)$$

i następnie

$$e_u = \frac{3}{1 + \frac{k}{5}} = \frac{15}{5+k} \quad (14.25)$$

Podstawiając (14.23) do (14.22) a następnie do (14.21) otrzymujemy

$$y_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{k}{(s+1)(s^2+2s+5)}}{1 + \frac{k}{(s+1)(s^2+2s+5)}} \frac{3}{s} \quad (14.26)$$

$$y_u = \frac{15k}{5+k} \quad (14.27)$$

Wstawiając (14.25) i (14.27) do (14.15) otrzymujemy

$$\frac{\frac{15}{5+k}}{\frac{15k}{5+k}} = \frac{1}{k} < 0,3 \quad (14.28)$$

Po rozwiązaniu nierówności otrzymujemy

$$k > \frac{10}{3} \quad (14.29)$$

Zadania

Dla UAR składającego się z regulatora proporcjonalnego o wzmacnieniu k i obiektu dynamicznego o transmitancji

a)
$$G_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} \quad (14.30)$$

$$b) \quad G_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+4)} \quad (14.31)$$

$$c) \quad G_o(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+3s+5)} \quad (14.32)$$

$$d) \quad G_o(s) = \frac{1}{(s+3)(s^2+5s+6)} \quad (14.33)$$

z pętlą pełnego sprzężenia zwrotnego wyznaczyć dla jakich wartości wzmocnienia $k > 0$ uchyb ustalony jest mniejszy od 25% wartości ustalonej sygnału regulowanego dla wymuszenia $4 \cdot \mathbf{1}(t)$.

15. Jakość regulacji

Ocena jakości regulacji dotyczy

1. stanu ustalonego ► dokładność statyczna ► uchyb ustalonych
2. stanu przejściowego ► jakość dynamiczna ► wskaźniki jakości

Dokładność statyczną mierzoną przy pomocy uchybu ustalonego łatwo zdefiniować i wyznaczyć.

Dokładność dynamiczną można opisać jako zdolność układu do wiernego i szybkiego nadążania wielkości regulowanej za wielkością zadaną.

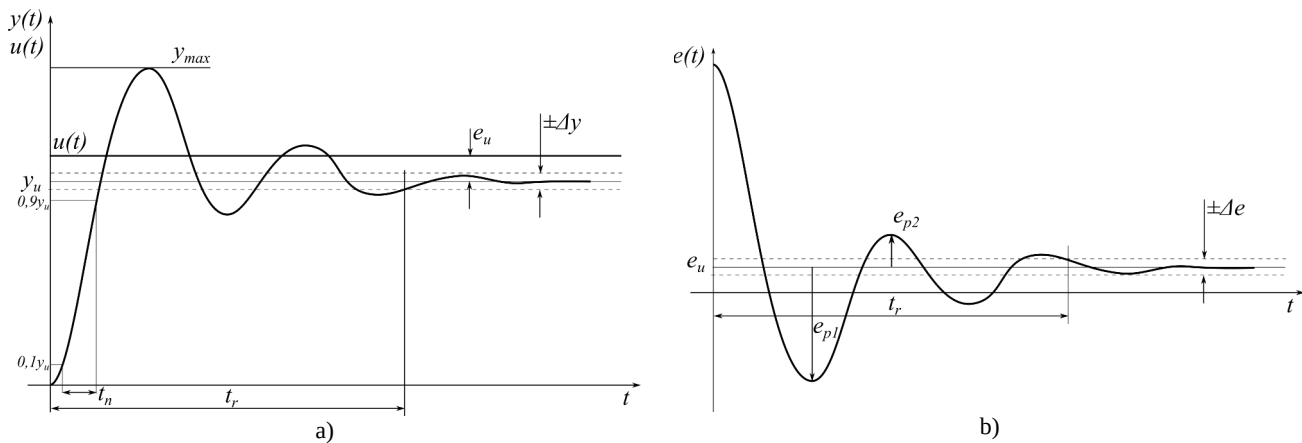
Powyższa definicja jest mało precyzyjna dlatego opracowano szereg metod oceny jakości parametrów dynamicznych UAR na podstawie różnych kryteriów i z wykorzystaniem różnych informacji na temat badanego układu a pozyskanych metodami analitycznymi jak i eksperymentalnymi.

Kryteria używane do oceny właściwości dynamicznych możemy podzielić na:

1. bazujące na odpowiedzi skokowej
2. kryteria całkowe
3. bazujące na charakterystykach częstotliwościowych
4. bazujące na rozkładzie biegunów transmitancji

Kryteria jakości regulacji na podstawie odpowiedzi skokowej:

Odpowiedź skokowa oraz uchyb przykładowego UAR przedstawione są na Rys. 15.1



Rys. 15.1: Przykładowa odpowiedź skokowa UAR a) wyjście, b) uchyb

Uchyb chwilowy można zapisać

$$e(t) = e_u + e_p(t) \quad (15.1)$$

gdzie: $e_p(t)$ to uchyb przejściowy a e_u to uchyb ustalony, który opisuje wzór

$$e_u = u - y_u \quad (15.2)$$

1. Czas ustalania (regulacji) t_r – czas, jaki upływa od chwili doprowadzenia wymuszenia do momentu, gdy składowa przejściowa sygnału błędu $e_p(t)$ zmaleje trwale poniżej założonej wartości Δe . (Δe równe $\pm 1 \sim \pm 3\%$ wokół wartości końcowej sygnału e_p)

$$t_r = t_{y(t) \in (y_u - \Delta y, y_u + \Delta y)} \quad (15.3)$$

2. Czas narastania t_n - czas potrzebny do tego, aby charakterystyka skokowa osiągnęła od 10% do 90% wartości ustalonej. Czas narastania określa szybkość działania układu regulacji.

$$t_n = t_{90\% y_u} - t_{10\% y_u} \quad (15.4)$$

3. Przeregulowanie p - procentowy udział uchybu maksymalnego w wartości ustalonej sygnału regulowanego. Przeregulowanie rośnie w miarę zbliżania się układu do granicy stabilności. Przeregulowanie można również wyrazić przy pomocy wartości sygnału regulowanego

$$p[\%] = \frac{y_{max} - y_u}{y_u} 100\% \quad (15.5)$$

4. Czas opóźnienia t_0 to czas jaki mija od momentu wystąpienia wymuszenia do chwili gdy odpowiedź układu osiągnie 50% wartości ustalonej y_u .
5. Aperiodyczność lub oscylacyjność (przebiegi aperiodyczne -> brak oscylacji) mierzona współczynnikiem zanikania

$$\kappa = \left| \frac{e_{p1}}{e_{p2}} \right| 100\% \quad (15.6)$$

Powyższe wielkości łatwo jest wyznaczyć graficznie na podstawie zarejestrowanej odpowiedzi skokowej badanego układu. Analityczne ich wyznaczenie, szczególnie dla układów wyższego rzędu bywa kłopotliwe.

Kryteria całkowe

1. ISE (Integral Squared Error)

$$ISE = \int_0^{\infty} e_p^2(t) dt \quad (15.7)$$

2. ITSE (Integral of Time multiplied by Squared Error)

$$IAE = \int_0^{\infty} |e_p(t)| dt \quad (15.8)$$

3. IAE (Integral of Absolute value of Error)

$$IAE = \int_0^{\infty} |e_p(t)| dt \quad (15.9)$$

4. ITAE (Integral of Time multiplied by Absolute value of Error)

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e_p(t)| dt \quad (15.10)$$

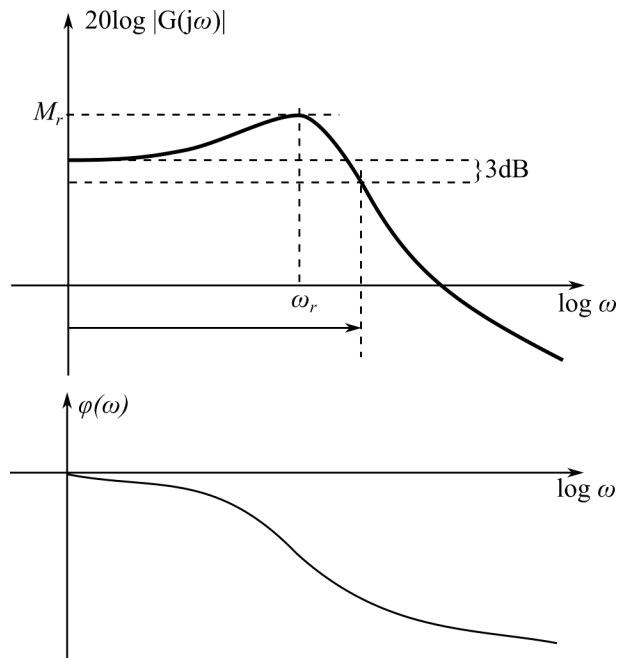
Kryteria częstotliwościowe

1. Moduł rezonansowy to maksymalna wartość osiągana przez amplitudową charakterystykę częstotliwościową

$$M_r[\text{dB}] = 20 \log |G(j\omega)|_{\max} \quad (15.11)$$

2. Pulsacja rezonansowa ω_r to pulsacja przy, której występuje moduł rezonansowy
3. Szerokość pasma BW to zakres pulsacji od zera do takiej pulsacji przy której amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa $20 \log |G(j\omega)|$ opada o 3dB względem wartości przy pulsacji zerowej.

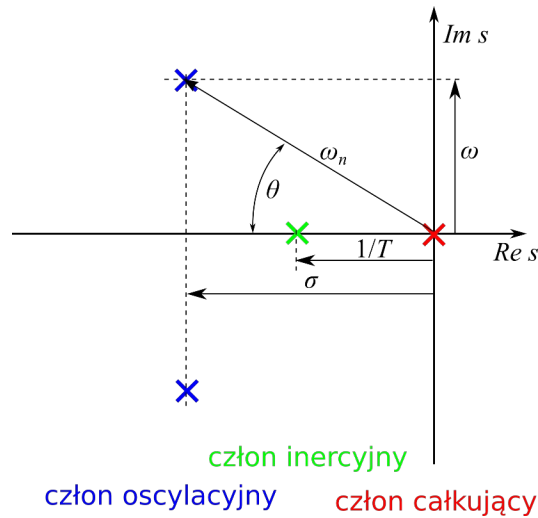
Na Rys. 15.2 pokazano powyższe wielkości na przykładowych charakterystykach



Rys. 15.2: Kryteria częstotliwościowe

Kryteria bazujące na rozkładzie biegunów transmitancji

Na Rys. 15.3 pokazano rozmieszczenie biegunów transmitancji operatorowej dla obiektów różnych typów



Rys. 15.3: Położenie biegunów transmitancji

Pokazano także odzwierciedlenie parametrów obiektu przez wielkości geometryczne (odległości, kąty).

Badanie jakości dynamicznej UAR według powyższych kryteriów można realizować

1. analitycznie wyprowadzając odpowiednie wzory na podstawie znanego modelu obiektu
2. graficznie na podstawie wykreślonych empirycznie charakterystyk częstotliwościowych.

Analityczny zapis jest w miarę prosty dla układów maksymalnie II-rzędu. Chociaż układy rzeczywiste są z reguły bardziej złożone ale często w akceptowalnym małym błędem można je aproksymować układami rzędu II. Stąd dalsza część rozważań będzie dotyczyła układu oscylacyjnego II-rzędu.

Układ oscylacyjny II-rzędu

Układ oscylacyjny II-rzędu to układ, którego dynamikę opisuje równanie różniczkowe

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad \text{dla } 0 < \frac{T_1}{2} < T_2 \quad (15.12)$$

Odpowiada mu transmitancja operatorowa dana wzorem

$$G(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (15.13)$$

Najczęściej zapisuje się ją w postaci

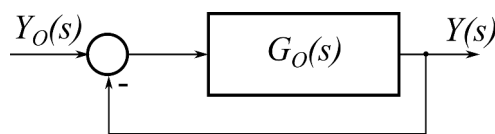
$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (15.14)$$

lub w postaci

$$G(s) = \frac{k \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (15.15)$$

gdzie : T – okres naturalny , okres drgań własnych nietłumionych ,
 $\omega_0 = 1/T$ – pulsacja naturalna ,
 $\zeta = T_1/2T_2 < 1$ względny współczynnik tłumienia ,
 k – współczynnik wzmocnienia (dla stanu ustalonego)

Jeśli chcielibyśmy uzyskać UAR czyli układ zamknięty o transmitancji danej wzorem (15.15) należałoby zastosować następujący układ



Rys. 15.4: Układ zamknięty

w którym transmitancja obiektu $G_O(s)$ będzie dana wzorem

$$G_O(s) = \frac{k \omega_0}{s(s + 2\zeta \omega_0)} \quad (15.16)$$

Dla dowolnej realizacji układu oscylacyjnego II-rzędu równanie charakterystyczne ma postać

$$T^2 s^2 + 2 \zeta Ts + 1 = 0 \quad (15.17)$$

i posiada pierwiastki zespolone

$$s_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} = -\sigma \pm j \omega \quad (15.18)$$

gdzie: $\sigma = \zeta/T = \zeta \omega_0$, $\omega = \sqrt{1-\zeta^2}/T = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_0$

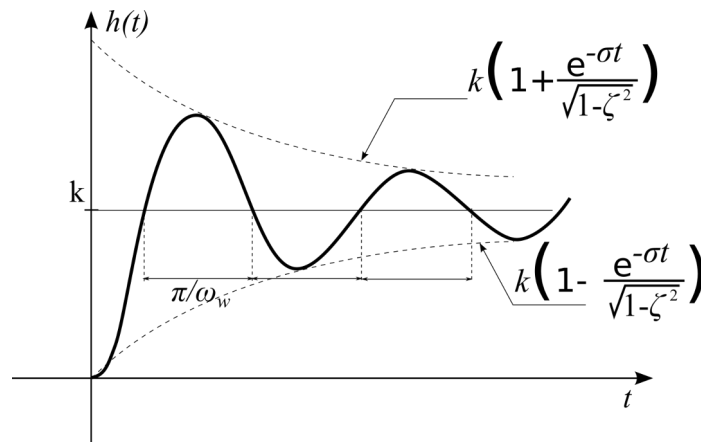
Odpowiedź skokowa dana jest wzorem

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_w t + \frac{\sigma}{\omega_w} \sin \omega_w t \right) \right] \quad (15.19)$$

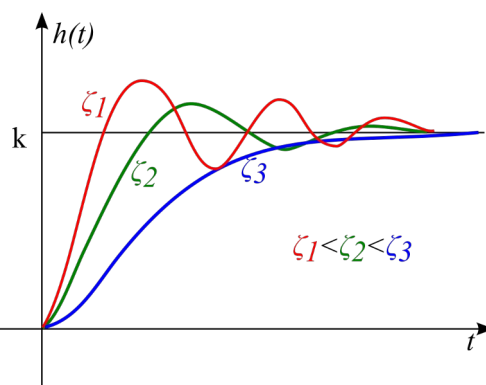
gdzie: ω_w to pulsacja oscylacji odpowiedzi skokowej (pulsacja drgań własnych tłumionych)

$$\omega_w = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} \quad (15.20)$$

Graficznie odpowiedź skokowa przedstawiona jest na Rys. 15.5 oraz Rys. 15.6



Rys. 15.5: Odpowiedź skokowa



Rys. 15.6: Odpowiedź skokowa dla różnych wartości wsp. tłumienia

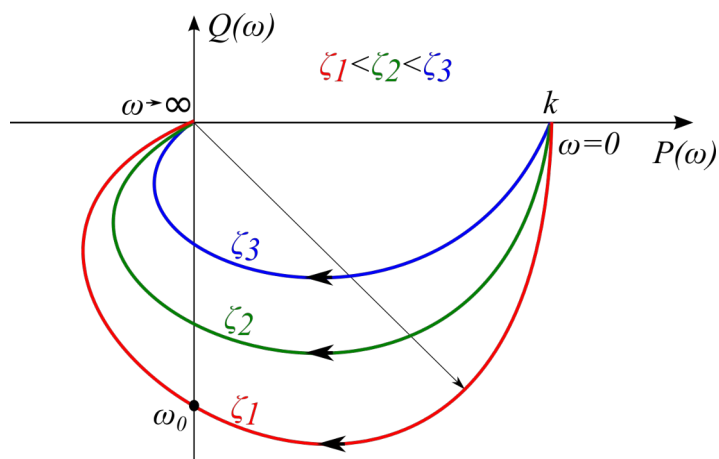
Transmitancja widmowa dana jest wzorem

$$G(j\omega) = \frac{k(1-\omega^2 T^2)}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2} + j \frac{-2k\xi\omega T}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2} \quad (15.21)$$

a jej poszczególne człony: rzeczywisty i urojony

$$P(\omega) = \frac{k(1-\omega^2 T^2)}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-2k\xi\omega T}{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2} \quad (15.22)$$

pozwalają wykreślić charakterystykę amplitudowo fazową (Nyquista)



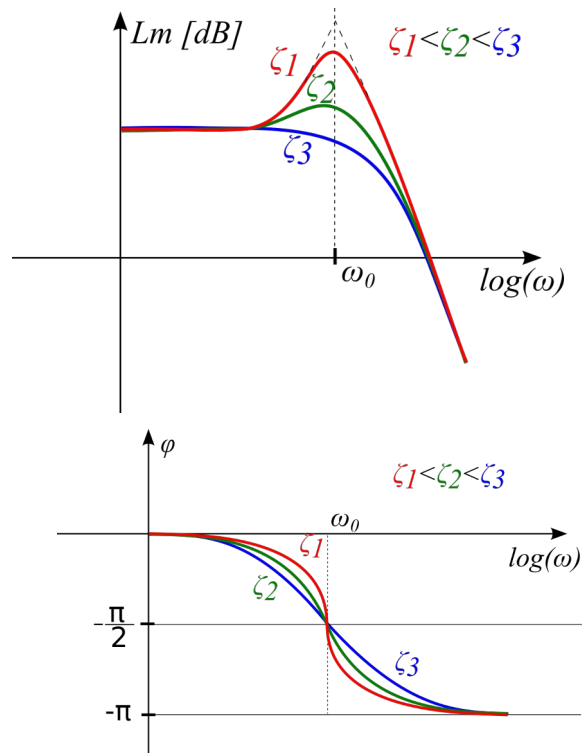
Rys. 15.7: Charakterystyka Nyquista

Na podstawie (15.22) można również wyznaczyć

$$Lm(\omega) = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}} \quad (15.23)$$

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

oraz wykreślić logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe amplitudową i fazową



Rys. 15.8: Charakterystyki Bodego

Kryteria jakości regulacji na podstawie odpowiedzi skokowej

1. Czas regulacji – t_r

Tabela 15.1: Wyznaczanie czasu regulacji

Δ_e [%]	1	32	5	10
t_r	$4,6/\sigma$	$4,0/\sigma$	$3,0/\sigma$	$2,3/\sigma$

2. Czas narastania – t_n

$$t_n = \frac{1,8}{\omega_0} \quad \text{dla } 0 < \zeta < 1 \quad (15.24)$$

3. Przeregulowanie – p

$$p[\%] = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (15.25)$$

występujące w chwili

$$t_p = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{dla } 0 < \zeta < 1 \quad (15.26)$$

4. Czas opóźnienia – t_0

$$t_0 = \frac{1+0,7\zeta}{\omega_0} \quad \text{dla } 0 < \zeta < 1 \quad (15.27)$$

Kryteria częstotliwościowe

1. Moduł rezonansowy – M_r w jednostkach bezwzględnych

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad 0 < \zeta \leq 0,707 \quad (15.28)$$

lub w dB

$$M_r[dB] = 20 \log \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad 0 < \zeta \leq 0,707 \quad (15.29)$$

2. Pulsacja rezonansowa – ω_r

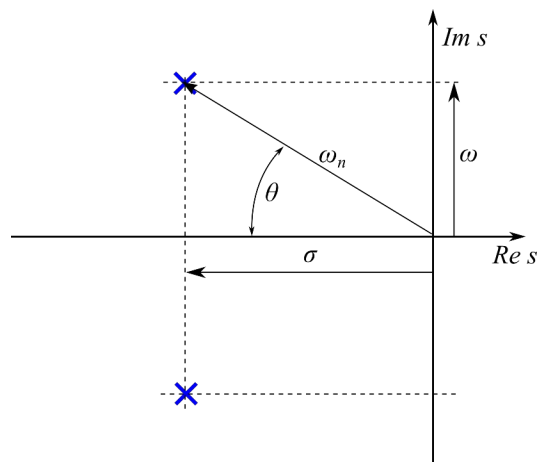
$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2} \quad 0 < \zeta \leq 0,707 \quad (15.30)$$

3. Szerokość pasma – BW

$$BW = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (15.31)$$

Kryteria bazujące na rozkładzie biegunów transmitancji

Na Rys. 15.9 pokazano położenie bieguna zespolonego na płaszczyźnie s a poniżej podano związki między wielkościami geometrycznymi a parametrami odpowiedzi skokowej oraz częstotliwościowymi.



Rys. 15.9: Położenie biegunów

Dla przypomnienia pierwiastki równania charakterystycznego:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega \quad (15.32)$$

gdzie: $\sigma = \zeta \omega_0$, $\omega = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0$

gdzie: ω_0 – pulsacja drgań nietłumionych,
 ζ – współczynnik tłumienia,
 σ – część rzeczywista pierwiastka
 ω – część urojona pierwiastka

dotatkowo

$$\zeta = \cos \theta \quad (15.33)$$

Przykłady

5. Naskicuj obszar na płaszczyźnie s , w którym powinny się znaleźć bieguny układu II-rzędu aby spełniał on wymagania: $t_r \leq 2$ s, $p \leq 17\%$ a $t_n < 0,5$ s. Przyjmij $\Delta_e = 1\%$

Na podstawie Tabela 15.1 dla $\Delta_e = 1\%$ możemy zapisać

$$t_r = \frac{4,6}{\sigma} \leq 2 \text{ s} \quad (15.34)$$

Analogicznie korzystając ze wzoru (24)

$$t_n = \frac{1,8}{\omega_0} \leq 0,5 \text{ s} \quad (15.35)$$

a na podstawie (25)

$$p[\%] = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 0,17 \quad (15.36)$$

Ze wzoru (15.34) obliczamy

$$\sigma \geq 2,3 \text{ 1/s} \quad (15.37)$$

Ze wzoru (15.35) obliczamy

$$\omega_0 \geq 3,6 \text{ rad/s} \quad (15.38)$$

Wzór (15.36) logarytmujemy stronami i otrzymujemy

$$\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \ln 0,167 \quad (15.39)$$

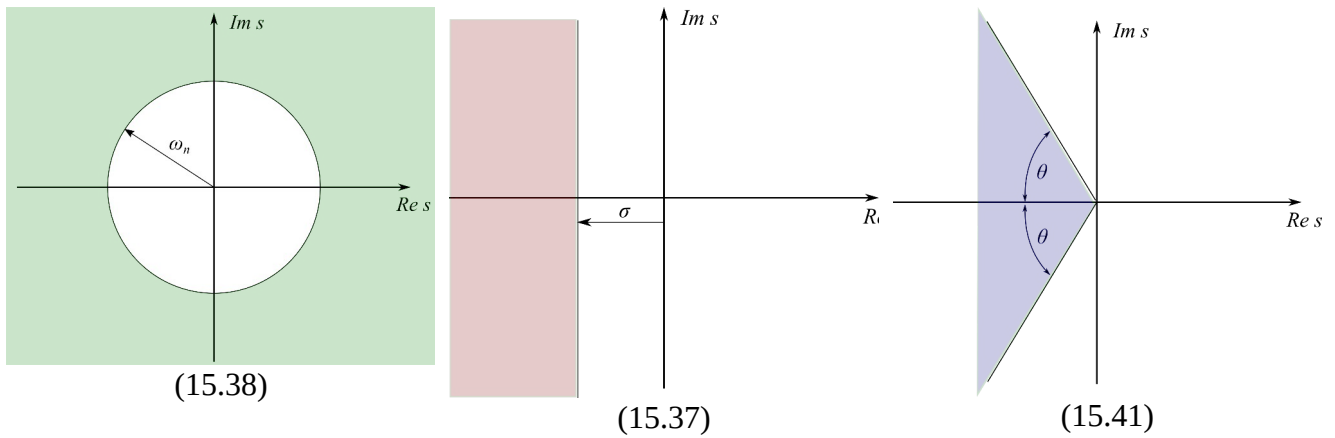
następnie mnożymy obustronnie przez -1

$$\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \geq 1,8 \quad (15.40)$$

Po dalszych przekształceniach otrzymujemy

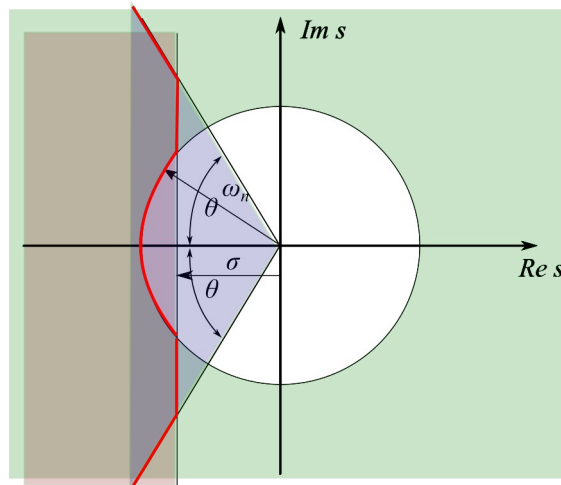
$$\zeta \geq 0,497 \quad (15.41)$$

Teraz na płaszczyźnie s można wykreślić obszary spełniający poszczególne warunki: (15.37), (15.38) i (15.41).



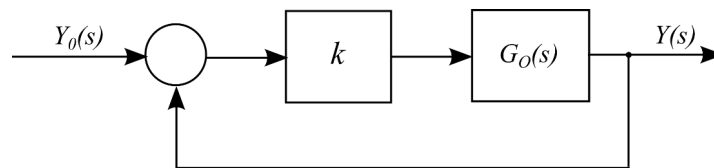
Rys. 15.10: Przykład 1, obszary spełniające warunki cząstkowe

a następnie obszar spełniający wszystkie powyższe warunki jednocześnie (po lewej stronie czerwonej linii) czyli obszar będący rozwiązaniem.



Rys. 15.11: Przykład 1, rozwiązanie

6. Dla układu o schemacie przedstawionym na Rys. 15.12



Rys. 15.12: Przykład 2

gdzie:

$$G_o(s) = \frac{3}{s(s+A)} \quad (15.42)$$

dobrac wartości k oraz A aby $t_n=0,9$ s a $M_r=3$ dB.

Transmitancja układu zamkniętego wynosi

$$G(s) = \frac{3k}{s^2 + As + 3k} \quad (15.43)$$

porównując ją do wzoru (15.15) otrzymujemy

$$\omega_0^2 = 3k \quad (15.44)$$

oraz

$$2\zeta\omega_0 = A \quad (15.45)$$

Na podstawie wzoru (15.24) oraz warunków zadania możemy zapisać

$$t_n = \frac{1,8}{\omega_0} = 0,9 \text{ s} \quad (15.46)$$

Stąd możemy wyznaczyć pulsację własną nietłumioną ω_0

$$\omega_0 = 2,0 \text{ rad/s} \quad (15.47)$$

Na podstawie wzoru (15.29) oraz warunków zadania możemy zapisać

$$M_r = 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 3 \text{ dB} \quad (15.48)$$

$$\log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,15 \quad (15.49)$$

$$\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,143 \quad (15.50)$$

po przekształceniach

$$0,125 = \zeta^2 - \zeta^4 \quad (15.51)$$

po dokonaniu podstawienia $u = \zeta^2$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$u^2 - u + 0,125 = 0 \quad (15.52)$$

po jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$u_1=0,147 \text{ i } u_2=0,854 \quad (15.53)$$

a więc

$$\xi_{1,2}=\pm 0,283 \text{ oraz } \xi_{3,4}=\pm 0,924 \quad (15.54)$$

Odrzucamy wartości ujemne oraz wartości większe niż 0,707 na podstawie warunku podanego we wzorze (15.29) i otrzymujemy

$$\xi = 0,383 \quad (15.55)$$

Wstawiając tę wartość oraz ω_0 z (15.47) do wzoru (15.45)

$$A = 1,532 \quad (15.56)$$

Rozwiązanie to:

$$\omega_0 = 2,0 \text{ rad/s i } A = 1,532 \quad (15.57)$$

Zadania:

1. Naskicuj obszar na płaszczyźnie s , w którym powinny się znaleźć bieguny układu II-rzędu aby spełniał on wymagania: $t_r \leq 0,6$ s, $p \leq 20\%$ a $t_n < 2$ s. Przyjąć $\Delta_e = 2\%$ [d]
2. Naskicuj obszar na płaszczyźnie s , w którym powinny się znaleźć bieguny układu II-rzędu aby spełniał on wymagania: $t_r \leq 1,5$ s, $p \leq 50\%$ a $t_n < 8$ s. Przyjąć $\Delta_e = 1\%$ [g]

3. Dla układu o schemacie przedstawionym na Rys. 15.12 oraz

$$G_o(s) = \frac{3}{s(s+A)} \quad (15.58)$$

dobrać wartości k oraz A aby $t_n = 1,8$ s a $M_r = 2$ dB

4. Dla układu o schemacie przedstawionym na Rys. 15.12 oraz

$$G_o(s) = \frac{2}{s(s+A)} \quad (15.59)$$

dobrać wartości k oraz A aby $t_n = 3,6$ s a $M_r = 3$ dB

Literatura

1. Mazurek J., Vogt H., Żydanowicz W.; "Podstawy automatyki"; Oficyna Wydawnicza PW; Warszawa 2006
2. Świetlicka A., Rybarczyk A., Jurkowlaniec A.; "Rachunek operatorowy. Metody rozwiązywania zadań"; WN PWN; Warszawa 2012
3. Próchnicki W., Dzida M.; "Podstawy automatyki: zbiór zadań"; Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej; Gdańsk 2004

4. Gessing R.; "Podstawy automatyki"; Wyd. Politechniki Śląskiej; 2001
5. Kaczorek T, Dzieliński A. Dąbrowski W., Łopatka R, "Podstawy teorii sterowania"; WNT; 2016
6. Brzóška J.; "Regulatory układy automatyki"; Wydawnictwo Mikom; 2004
7. Kaczorek T.; "Teoria Sterowania t.1", PWN; 1977