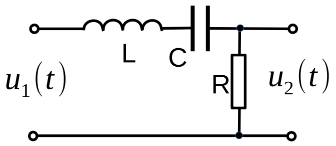
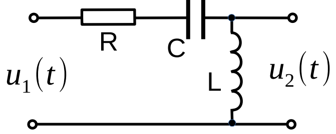
Układ 1 – model transmitancyjny




$$u_1(t)=L\frac{di}{dt}+u_C(t)+u_R(t)$$
$$u_2(t)=u_R(t)$$
$$i=\frac{u_2(t)}{R}$$
$$i=C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_C(t)=u_1(t)-u_2(t)-L\frac{di(t)}{dt}=u_1(t)-u_2(t)-\frac{L}{R}\frac{du_2(t)}{dt}$$
$$u_2\frac{(t)}{R}=C\frac{du_C(t)}{dt}$$
$$\frac{u_2(t)}{RC}=\frac{d}{dt}(u_1(t)-u_2(t)-\frac{L}{R}\frac{du_2(t)}{dt})$$
$$\frac{u_2(t)}{R}=\frac{du_1(t)}{dt}-\frac{du_2(t)}{dt}-\frac{L}{R}\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}\quad|\mathcal{L}$$
$$\frac{U_2(s)}{RC}=sU_1(s)-sU_2(s)-LRs^2U_2(s)$$
$$\frac{U_2(s)}{RC}+sU_2(s)+\frac{L}{R}s^2U_2(s)=sU_1(s)$$
$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{s}{\frac{1}{RC}+s+\frac{L}{R}s^2}=\frac{sRC}{LCs^2+RCs+1}$$

Układ 2 – model transmitancyjny




$$u_1(t)=R\,i(t)+u_C(t)+u_2(t)$$
$$u_2(t)=L\frac{di}{dt}$$
$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_C(t)=u_1(t)-u_2(t)-Ri(t)$$
$$i(t)=C\frac{du_1(t)}{dt}-C\frac{du_2(t)}{dt}-RC\frac{di(t)}{dt}=C\frac{du_1(t)}{dt}-C\frac{du_2(t)}{dt}-\frac{RC}{L}\frac{du_2(t)}{dt}$$

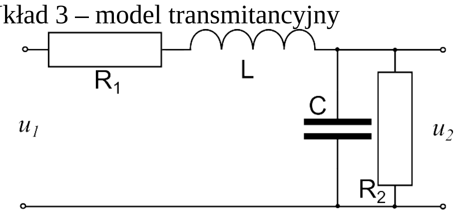
$$u_2(t)=LC\frac{d^2u_1(t)}{dt^2}-LC\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}-RC\frac{du_2(t)}{dt}\quad|\mathcal{L}$$

$$U_2(s)=LCs^2U_1(s)+LCs^2U_2(s)-RCs\,U_2(s)$$

$$U_2(s)(1+LCs^2+RCs)=LCs^2U_1(s)$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{LC\,s^2}{LCs^2+RCs+1}$$

Układ 3 – model transmitancyjny




Zapisujemy bilans napięć w oczku składającym się ze źródła zasilania $u_1$, rezystora $R_1$, cewki L oraz kondensatora C

$$u_1=R_1i_1+L\frac{di_1}{dt}+u_2 \quad (1)$$

Zapisujemy bilans prądów w węźle gdzie: $i_1$ – prąd płynący przez rezystor $R_1$ i cewkę L, $i_2$ – prąd płynący przez rezystor R2 oraz $i_c$ – prąd płynący przez kondensator C.

$$i_1=i_C+i_2 \quad (2)$$

Równanie opisujące związek między prądem a napięciem kondensatora

$$i_C=C\frac{du_2}{dt} \quad (3)$$

Dla rezystor R2 można zapisać

$$i_2=\frac{u_2}{R_2} \quad (4)$$

Wstawiamy (2), (3), (4) do (1)

$$u_1=R_1\left(C\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{R_2}\right)+L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_2}{dt}+\frac{u_2}{R_2}\right)+u_2 \quad (5)$$

po przekształceniu powstałe równanie transformujemy dwustronnie transformacją Laplace’a

$$u_1=R_1C\frac{du_2}{dt}+\frac{R_1}{R_2}u_2+LC\frac{d^2u_2}{dt^2}+\frac{L}{R_2}\frac{du_2}{dt}+u_2 \quad /\mathcal{L}\ (6)$$

wykorzystujemy właściwości: liniowość oraz transformatę pochodnej i otrzymujemy

$$U_1=R_1C\,sU_2+\frac{R_1}{R_2}U_2+LCs^2U_2+\frac{L}{R_2}sU_2+U_2 \quad (7)$$

Korzystając z definicji transmitancji operatorowej po odpowiednim przekształceniu równania (7) dostajemy

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1}{LCs^2+\left(R_1C+\frac{L}{R_2}\right)s+\frac{R_1}{R_2}+1} \quad (8)$$

Dobrze jest przekształcić transmitancję operatorową do postaci takiej aby wyraz wolny w mianowniku był równy 1. W tym celu mnożymy licznik i mianownik przez $R_2$

$$G(s)=\frac{R_2}{R_2LC\,s^2+(R_1R_2C+L)s+R_1+R_2} \quad (9)$$

a następnie dzielimy przez $R_1+R_2$

$$G(s)=\frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_2}{R_1+R_2}LC\,s^2+\frac{(R_1R_2C+L)}{R_1+R_2}s+1} \quad (10)$$

Układ 3 – model w przestrzeni stanu

Wykorzystujemy równanie (6)

$$u_1 = R_1 C \frac{du_2}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_2 + LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{du_2}{dt} + u_2 \quad (11)$$

grupujemy składniki

$$u_1 = LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \left( R_1 C + \frac{L}{R_2} \right) \frac{du_2}{dt} + \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) u_2 \quad (12)$$

Najwyższą pochodną sygnału wyjściowego przenosiny na jedna stronę a pozostałe wyrażenia na drugą

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -\left( R_1 C + \frac{L}{R_2} \right) \frac{du_2}{dt} - \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) u_2 + u_1 \quad (13)$$

i po przekształceniu

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -\left( \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2} \right) \frac{du_2}{dt} - \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) u_2 + u_1 \quad (14)$$

Następnie dzielimy obustronnie przez współczynnik stojący przy najwyższej pochodnej (w tym praypadku *LC*)

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} = -\left( \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \right) \frac{du_2}{dt} - \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \right) u_2 + \frac{1}{LC} u_1 \quad (15)$$

Równanie dynamiki jest równaniem drugiego rzędu więc niezbędne są dwie zmienne stanu. Przyjmujemy zmienne fazowe: : $x_1$ jako sygnał wyjściowy czy $u_2$ i $x_2$ jako pochodną $x_1$.

$$\begin{aligned} x_1 &= u_2 \\ x_2 &= \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Równanie (15) można więc zapisać

$$\dot{x}_2 = -\left( \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \right) x_2 - \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \right) x_1 + \frac{1}{LC} u_1 \quad (17)$$

zestawiając razem (16) i (17) zapisujemy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left( \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \right) x_2 - \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \right) x_1 + \frac{1}{LC} u_1 \end{aligned} \quad (18)$$

i w postaci macierzowej: równanie dynamiki

$$\dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left( \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \right) & -\left( \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} * u_1 \quad (19)$$

oraz równanie wyjścia

$$y = [1 \;\; 0] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] * u_1 \quad (20)$$