1. Układ modelowany

Schemat układu z zaznaczeniem elementów oraz sygnałów

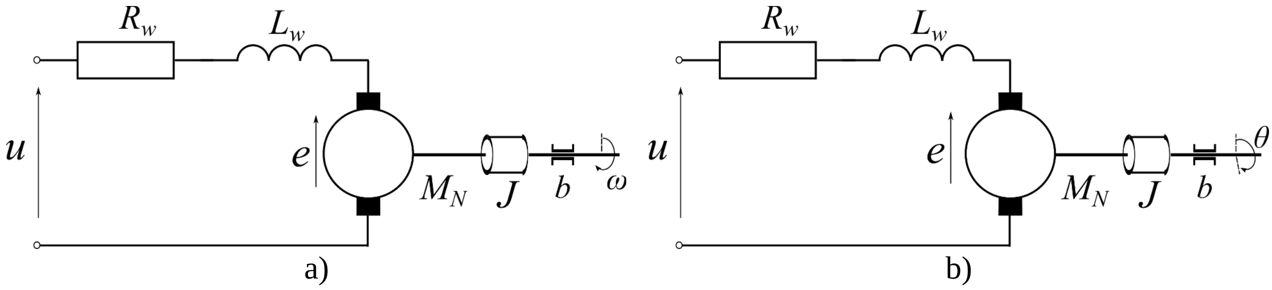

Tabela z oznaczeniami

Wielkości elektryczne	**Wielkości mechaniczne**	
u – napięcie zasilania	M_N – moment napędowy silnika	k_m – stała mechaniczna
R – rezystancja uzwojeń	M_{obc} – moment obciążenia	k_e - stała elektryczna
L – indukcyjność uzwojeń	b - współczynnik tarcia lepkiego	
e – SEM indukcji	J – moment bezwładności wirnika	
i – natężenie prądu w tworniku	θ – kąt obrotu wału	
	ω – prędkość kątowa wału	

2. Równania fizyczne

Dla części elektrycznej bilans napięć w oczku

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + e \tag{1}$$

Dla części mechanicznej bilans momentów sił z uwzględnieniem drugiej zasady dynamiki Newtowa oraz tarcia tocznego

$$M_N = J\frac{d\omega}{dt} + b\omega \tag{2}$$

Równania wiążące wielkości mechaniczne i elektryczne

$$e = k_e \omega \tag{3}$$

$$M_N = k_m i \tag{4}$$

Po wstawieniu (3) do (1) otrzymujemy

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + k_e \omega \tag{5}$$

Po wstawieniu (4) do (2) otrzymujemy

$$k_m i = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega \tag{6}$$

3. Modelowanie

3.1. Model transmitancyjny 1

Założenia:

Wymuszenia	Odpowiedzi	Zakłócenia
napięcie zasilania twornika - *u*	prędkość kątowa wału - ω	-

Równanie (6) dzielimy obustronnie przez k_m i otrzymujemy

$$i = \frac{J}{k_m}\frac{d\omega}{dt} + \frac{b}{k_m}\omega \tag{7}$$

Natężenie prądu *i* opisane wzorem (7) wstawiamy do wzoru (5)

$$u = R\left(\frac{J}{k_m}\frac{d\omega}{dt} + \frac{b}{k_m}\omega\right) + L\frac{d}{dt}\left(\frac{J}{k_m}\frac{d\omega}{dt} + \frac{b}{k_m}\omega\right) + k_e\omega \tag{8}$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie dynamiki

$$u = \frac{RJ}{k_m}\frac{d\omega}{dt} + \frac{Rb}{k_m}\omega + \frac{LJ}{k_m}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{Lb}{k_m}\frac{d\omega}{dt} + k_e\omega \tag{9}$$

Równanie (9) transformujemy obustronnie transformacją Laplace'a zakładając zerowe warunki początkowe. Po skorzystaniu z właściwości transformacji oraz przekształceniach otrzymujemy

$$U(s) = \frac{LJ}{k_m}s^2\Omega(s) + \left(\frac{RJ}{k_m} + \frac{Lb}{k_m}\right)s\Omega(s) + \left(\frac{Rb + k_m k_e}{k_m}\right)\Omega(s) \tag{10}$$

Z równania (10) można bezpośrednio wyprowadzić transmitancję operatorową *G(s)*

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{LJ}{k_m}s^2 + \left(\frac{RJ}{k_m} + \frac{Lb}{k_m}\right)s + \left(\frac{Rb + k_m k_e}{k_m}\right)} \tag{11}$$

Wskazane jest doprowadzenie do stanu, w którym wyraz wolny wielomianu w mianowniku równy jest 1. W tym celu przenosimy k_m do licznika i otrzymujemy

$$G(s) = \frac{k_m}{LJs^2 + (RJ + Lb)s + (Rb + k_m k_e)} \tag{12}$$

Następnie dzielimy licznik i mianownik przez $Rb+k_m k_e$ co daje nam pożądaną postać transmitancji

$$G(s)=\frac{\frac{k_m}{Rb+k_m k_e}}{\frac{LJ}{Rb+k_m k_e}s^2+\left(\frac{RJ+Lb}{Rb+k_m k_e}\right)s+1} \tag{13}$$

3.2. Model transmitancyjny 2

Założenia:

Wymuszenia	Odpowiedzi	Zakłócenia
napięcie zasilania twornika - u	kąt obrotu wału - θ	-

Równanie (1) pozostawiamy bez zmian

$$u=Ri+L\frac{di}{dt}+e \tag{14}$$

W równaniu (2) przechodzimy ze prędkości kątowej wału ω na kat obrotu wału θ

$$M_N=J\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt} \tag{15}$$

Analogicznie postępujemy z równaniem (3)

$$e=k_e\frac{d\theta}{dt} \tag{16}$$

Równanie (4) pozostaje bez zmian

$$M_N=k_m i \tag{17}$$

Po uwzględnieniu równania (3), (14) przyjmuje postać

$$u=Ri+L\frac{di}{dt}+k_e\frac{d\theta}{dt} \tag{18}$$

Po podstawieniu (17), równanie (15) można zapisać

$$k_m i=J\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt} \tag{19}$$

Po podzieleniu obustronnie przez k_m

$$i=\frac{J}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b}{k_m}\frac{d\theta}{dt} \tag{20}$$

Podstawiamy (20) do (18)

$$u=R\left(\frac{J}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b}{k_m}\frac{d\theta}{dt}\right)+L\frac{d}{dt}\left(\frac{J}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b}{k_m}\frac{d\theta}{dt}\right)+k_e\frac{d\theta}{dt} \tag{21}$$

Po wymnożeniu

$$u=\frac{RJ}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Rb}{k_m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{LJ}{k_m}\frac{d^3\theta}{dt^3}+\frac{Lb}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+k_e\frac{d\theta}{dt} \tag{22}$$

Po pogrupowaniu według rzędu pochodnych

$$u=\frac{LJ}{k_m}\frac{d^3\theta}{dt^3}+\frac{RJ+Lb}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Rb+k_e k_m}{k_m}\frac{d\theta}{dt} \tag{23}$$

Równanie (23) poddajemy obustronnie transformacji Laplace'a przy założeniu zerowych warunków początkowych

$$U(s)=\frac{LJ}{k_m}s^3\Theta(s)+\frac{RJ+Lb}{k_m}s^2\Theta(s)+\frac{Rb+k_e k_m}{k_m}s\Theta(s) \tag{24}$$

Wprowadzamy transmitancje operatorową jako iloraz transformaty Laplace'a odpowiedzi $\Theta(s)$ do transformaty Laplace'a wymuszenia $U(s)$

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{s\left(\frac{LJ}{k_m}s^2+\frac{RJ+Lb}{k_m}s+\frac{Rb+k_e k_m}{k_m}\right)} \tag{25}$$

Mnożymy licznik i mianownik przez k_m

$$G(s)=\frac{k_m}{s\left(LJs^2+(RJ+Lb)s+(Rb+k_e k_m)\right)} \tag{26}$$

a następnie dzielimy licznik i mianownik przez wyrażenie $Rb+k_e k_m$ aby uzyskać transmitancję z pożądanej postaci.

$$G(s)=\frac{\frac{k_m}{Rb+k_e k_m}}{s\left(\frac{LJ}{Rb+k_e k_m}s^2+\frac{RJ+Lb}{Rb+k_e k_m}s+1\right)} \tag{27}$$

3.3. Model w przestrzeni stanu 1

Założenia:

Wymuszenia	Odpowiedzi	Zakłócenia
napięcie zasilania twornika - u	prędkość kątowa wału - ω	-
zmienne stanu - fazowe		

Jako punkt wyjścia przyjmujemy równanie dynamiki odpowiadające założeniom, wzór (9).

$$u=\frac{LJ}{k_m}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{RJ+Lb}{k_m}\frac{d\omega}{dt}+\frac{Rb+k_e}{k_m}\omega \tag{28}$$

Przenosimy najwyższą pochodną na jedna stronę a pozostałe składniki na drugą

$$\frac{LJ}{k_m}\frac{d^2\omega}{dt^2}=-\frac{RJ+Lb}{k_m}\frac{d\omega}{dt}-\frac{Rb+k_e}{k_m}\omega+u \tag{29}$$

Dzielimy obustronnie przez współczynnik przy najwyższej pochodnej (aby otrzymać najwyższą pochodną ze współczynnikiem równym 1)

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}=-\frac{RJ+Lb}{LJ}\frac{d\omega}{dt}-\frac{Rb+k_e}{LJ}\omega+\frac{k_m}{LJ}u \tag{30}$$

Wprowadzamy zmienne stanu

$$\begin{aligned}x_1&=\omega\\ x_2&=\dot{x}_1\end{aligned} \tag{31}$$

W równaniu (30) zastępujemy poszczególne pochodne odpowiedzi odpowiednimi zmiennymi stanu oraz wykorzystując związki między zmiennymi stanu zapisujemy układ równań

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=-\frac{RJ+Lb}{LJ}x_2-\frac{Rb+k_e}{LJ}x_1+\frac{k_m}{LJ}u\end{aligned} \tag{32}$$

Zapisujemy układ równań (32) w postaci macierzowej otrzymując równanie dynamiki oraz wykorzystując jedną z zależności w (31) równanie wyjścia

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{Rb+k_e}{LJ} & -\frac{RJ+Lb}{LJ}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{k_m}{LJ}\end{bmatrix}\cdot u\\ y&=[1\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[0]\cdot u\end{aligned} \tag{33}$$

3.4. Model w przestrzeni stanu 2

Założenia:

Wymuszenia	Odpowiedzi	Zakłócenia
napięcie zasilania twornika - u	kąt obrotu wału - θ	-
zmienne stanu - fazowe		

Jako punkt wyjścia przyjmujemy równianie dynamiki w postaci (23)

$$u=\frac{LJ}{k_m}\frac{d^3\theta}{dt^3}+\frac{RJ+Lb}{k_m}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Rb+k_e k_m}{k_m}\frac{d\theta}{dt} \tag{34}$$

Przenosimy najwyższą pochodną na jedna stronę a pozostałe składniki na drugą i dzielimy obustronnie przez współczynnik stojący przy najwyższej pochodnej JL/k_m

$$\frac{d^3\theta}{dt^3}=-\frac{RJ+Lb}{LJ}\frac{d^2\theta}{dt^2}-\frac{Rb+k_e k_m}{LJ}\frac{d\theta}{dt}+\frac{k_m}{LJ}u \tag{35}$$

Wprowadzamy zmienne stanu. Ponieważ równanie (35) jest równaniem trzeciego rzędu należy przyjąć trzy zmienne stanu

$$\begin{aligned} x_1&=\theta\\ x_2&=\dot{x}_1\\ x_3&=\dot{x}_2 \end{aligned} \tag{36}$$

Po podstawieniu do (35)

$$\dot{x}_3=-\frac{RJ+Lb}{LJ}x_3-\frac{Rb+k_e k_m}{LJ}x_2+\frac{k_m}{LJ}u \tag{37}$$

Wykorzystując (36) i (37) otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\\ \dot{x}_3&=-\frac{RJ+Lb}{LJ}x_3-\frac{Rb+k_e k_m}{LJ}x_2+\frac{k_m}{LJ}u \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{Rb+k_e k_m}{LJ} & -\frac{RJ+Lb}{LJ}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{k_m}{LJ}\end{bmatrix}\cdot u\\ y&=[1\quad 0\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+[0]\cdot u \end{aligned} \tag{39}$$

3.5. Model w przestrzeni stanu 3

Założenia:

Wymuszenia	**Odpowiedzi**	**Zakłócenia**
napięcie zasilania twornika – u moment obciążenia - M_{obc}	prędkość kątowa wału - ω	-
zmienne stanu – i, ω		

$$u=Ri+L\frac{di}{dt}+e \tag{40}$$

Równanie (2) zapisane w pełnej wersji, z uwzględnieniem momentu obciążenia M_{obc}

$$M_N = J\frac{d\omega}{dt} + b\omega + M_{obc} \tag{41}$$

$$e = k_e\omega \tag{42}$$

$$M_N = k_m i \tag{43}$$

Po podstawieniu (42) do (46) otrzymujemy

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + k_e\omega \tag{44}$$

Po podstawieniu (43) do (41) otrzymuje

$$k_m i = J\frac{d\omega}{dt} + b\omega + M_{obc} \tag{45}$$

Z równania (44)

$$L\frac{di}{dt} = -Ri - k_e\omega + u \tag{46}$$

Z równania (46)

$$J\frac{d\omega}{dt} = +k_m i - b\omega - M_{obc} \tag{47}$$

Dzielimy obustronnie każde w równań (46) i (47) przez współczynniki stojące przy najwyższych pochodnych i otrzymujemy znormalizowany układ różniczkowych

$$\frac{di}{dt} = \frac{-R}{L}i - \frac{k_e}{L}\omega + \frac{1}{L}u \tag{48}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{J}i - \frac{b}{J}\omega - \frac{1}{J}M_{obc} \tag{49}$$

W postaci macierzowej równania dynamiki i wyjścia przyjmują postać

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\dot{i}\\ \omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L}\\ \frac{k_m}{J} & -\frac{b}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & -\frac{1}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ M_{obc}\end{bmatrix}\\ \omega = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ \omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ M_{obc}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{50}$$

3.6. Model w przestrzeni stanu 4

Założenia:

Wymuszenia	**Odpowiedzi**	**Zakłócenia**

napięcie zasilania twornika – u moment obciążenia - M_{obc}	Kąt obrotu wału - θ	-
zmienne stanu – i, θ, θ'		

Równanie (1) bez zmian

$$u=Ri+L\frac{di}{dt}+e \qquad (51)$$

Bilans momentów, druga zasada dynamiki Newtowa dla układów wirujących wraz z uwzględnieniem momentu obciążenia (na podstawie (2))

$$M_N=J\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt}+M_{obc} \qquad (52)$$

Równania wiążące część elektryczną i mechaniczną (3) (4) bez zmian

$$e=k_e\frac{d\theta}{dt} \qquad (53)$$

$$M_N=k_m i \qquad (54)$$

Po podstawieniu (53) do (51) oraz (54) do (52) otrzymujemy dwa równania

$$u=Ri+L\frac{di}{dt}+k_e\frac{d\theta}{dt} \qquad (55)$$

$$k_m i=J\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt}+M_{obc} \qquad (56)$$

W równaniach (55) i (56) przenosimy wyrażenie z najwyższą pochodną na lewa stronę a pozostałe na prawą

$$L\frac{di}{dt}=-Ri-k_e\frac{d\theta}{dt}+u \qquad (57)$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=k_m i-b\frac{d\theta}{dt}-M_{obc} \qquad (58)$$

Dzielimy obustronnie każde z powyższych równań przez współczynnik przy najwyższej pochodnej

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i-\frac{k_e}{L}\frac{d\theta}{dt}+\frac{1}{L}u \qquad (59)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{k_m}{J}i-\frac{b}{J}\frac{d\theta}{dt}-\frac{1}{J}M_{obc} \qquad (60)$$

W wersji macierzowej równanie dynamiki oraz równanie wyjścia

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{k_e}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_m}{J} & 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ M_{obc} \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ M_{obc} \end{bmatrix}$$