# Laboratorium Teorii i Techniki Sterowania

# TTS05: Modelowanie obiektów sterowania w LabVIEW – opis w przestrzeni stanu

Temat ten omawia zagadnienia dot. modelowania obiektów sterowania w przestrzeni stanu.

## 1. Opis w przestrzeni stanu (State Space)

Cechą charakterystyczną fizycznych układów dynamicznych jest zdolność do akumulowania energii. Oznacza to, że jeżeli na układ dynamiczny działa sygnał wejściowy *u(t)*, to znajomość tego sygnału w chwili $t=t_0$ nie wystarcza do określenia sygnału wyjściowego $y(t_0)$. Na wartość tego sygnału w chwili $t_0$ wpływa bowiem również przebieg sygnału *u(t)* w przeszłości, dla $t< t_0$, decydujący o nagromadzonej w układzie energii. Aby odciąć się od przeszłości, wprowadza się pojęcie *stanu*. Stan jest to minimalna liczba danych charakteryzująca przeszłość układu dynamicznego i umożliwiająca jednocześnie określenie jego zachowania się w przyszłości (pod warunkiem znajomości przyszłych sygnałów wejściowych). Dla przykładu załóżmy, że modelem matematycznym układu dynamicznego jest równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n-tego

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t)$$

Znajomość prawej strony równania modelującej sygnał wejściowy *u(t)*, oraz warunków początkowych $y(t_0),\ldots,y^{(n-1)}(t_0)$ w liczbie równej rzędowi równania, określa jednocześnie rozwiązanie, czyli znajomość sygnału wyjściowy układu *y(t).* Można więc stwierdzić, że warunki początkowe określają stan układu w chwili $t_0$. Każde równanie różniczkowe rzędu *n*-tego można sprowadzić do *postaci normalnej,* czyli przedstawić w postaci układu *n* równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$\begin{cases} y(t) = x_1(t) \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \end{cases}$$

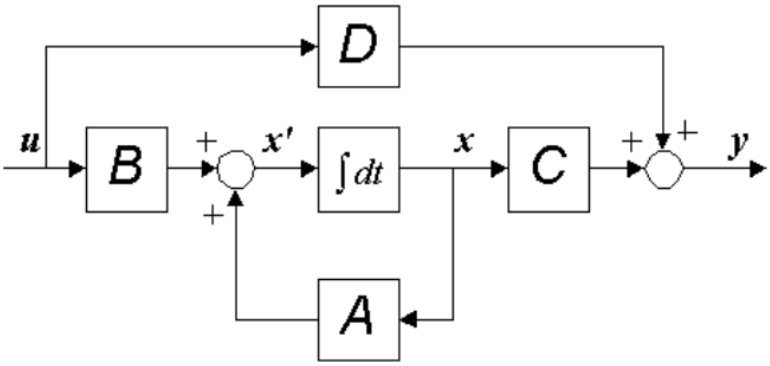
Znajomość zmiennych $x(i=1,2,...n)$ w chwili $t_0$ oraz sygnałów $u_i(t)(i=1,2,...,m)$ dla $t \geq t_0$ umożliwia określenie zachowania się układu dla wszystkich chwil $t \geq t_0$. Zmienne $x_i$ określają więc w każdej chwili stan układu i stąd są nazwane *współrzędnymi stanu*.

Zapis równań można uczynić bardziej przejrzystym stosując symbolikę wektorową, przy czym: $x=(x_1, x_2,...,x_n)^T$; $u=(u_1, u_2,...,u_m)^T$; $f=(f_1, f_2,...,f_n)^T$;
*n* - wymiar wektora stanu,
*m* - wymiar wektora sygnałów sterujących.

Wektor *x*, którego elementami są współrzędne stanu, nazywa się *wektorem stanu,* a przestrzeń n-wymiarową o współrzędnych $x_i(i=1,2,...,n)$ nosi nazwę *przestrzeni stanu,* a powyższe równanie nosi nazwę *równanie stanu*. Zmiany wektora stanu z biegiem czasu tworzą w przestrzeni stanu krzywą nazwaną *trajektorią stanu.* Sygnały *y=y(t),* które zjawiają się na wyjściu układu, są pewnymi funkcjami współrzędnych stanu, mogą być również zależne bezpośrednio (nie przez współrzędne stanu) od sygnałów wejściowych u. Równanie $y=f_y(x,u)$ nazywa się równaniem wyjścia układu dynamicznego. Zauważmy, że są to równania algebraiczne, bowiem cały opis dynamiki układu jest zawarty w równaniu stanu. W ten sposób pełny opis układu obejmuje równania stanu i wyjścia, co w notacji macierzowej ma następującą postać:

$$X' = Ax + Bu$$
$$Y = Cx + Du$$

Równaniom tym odpowiada schemat:




Rys. 1. Schemat liniowego układu dynamicznego opisanego w przestrzeni stanu.

*A* - macierz układu, (stanu), reprezentuje dynamikę systemu

*B* - macierz wejścia, sterowania

*C* - macierz wyjścia (odpowiedzi), pokazuje w jaki sposób są transformowane zmienne stanu na zmienne wyjściowe

*D* - macierz tranzycyjna (bezpośredniego sterowania)

x(t) – wektor zmiennych zależnych, wektor stanu

u(t) – wektor wymuszeń wejściowych, wektor sterowania

y(t) – wektor wielkości wyjściowych, wektor odpowiedzi

Weźmy pod uwagę ogólny przypadek:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = u(t)$$

czyli:

$$y^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \ldots - \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} - \frac{a_0}{a_n} y + \frac{1}{a_n} u(t)$$

Wykonujemy podstawienie wg:

$$\begin{cases} \mathrm{y(t) = x_1(t)} \\ \mathrm{x'_1(t) = x_2(t)} \\ \mathrm{x'_2(t) = x_3(t)} \\ \vdots \\ \mathrm{x'_{n-1}(t) = x_n(t)} \end{cases}$$

wówczas:

$$x_n' = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 + \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u(t)$$

Otrzymamy układ równań 1-go rzędu następującej postaci:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 + \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \frac{1}{a_n}u(t) \end{cases}$$
$$\{y(t) = x_1(t)$$

który w notacji macierzowej ma następującą postać:

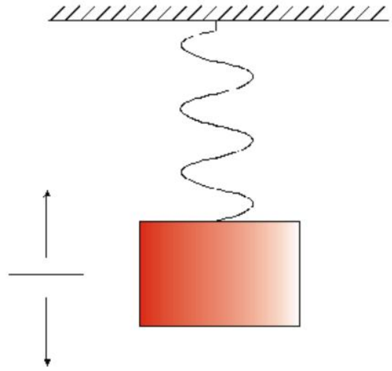
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} * u$$

$$[y] = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} * u$$

czyli:

$$X' = Ax + Bu$$
$$Y = Cx + Du$$

**Przykład I:**



Rys. 2. Wizualizacja obiektu

Weźmy pod uwagę oscylator liniowy z tłumieniem (obciążnik na sprężynie) opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + ky(t) = u(t)$$

Po przekształceniu:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\alpha}{m}\frac{dy}{dt} - \frac{k}{m}y(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

lub w uproszczeniu:

$$y'' = -\frac{\alpha}{m}y' - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u$$

Przyjmując następujące współrzędne stanu:

$$\begin{cases} \mathrm{y(t)} = \mathrm{x_1(t)} \\ \mathrm{x_1'(t)} = \mathrm{x_2(t)} \\ \mathrm{x_2'(t)} = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}x_1 - \frac{\alpha}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

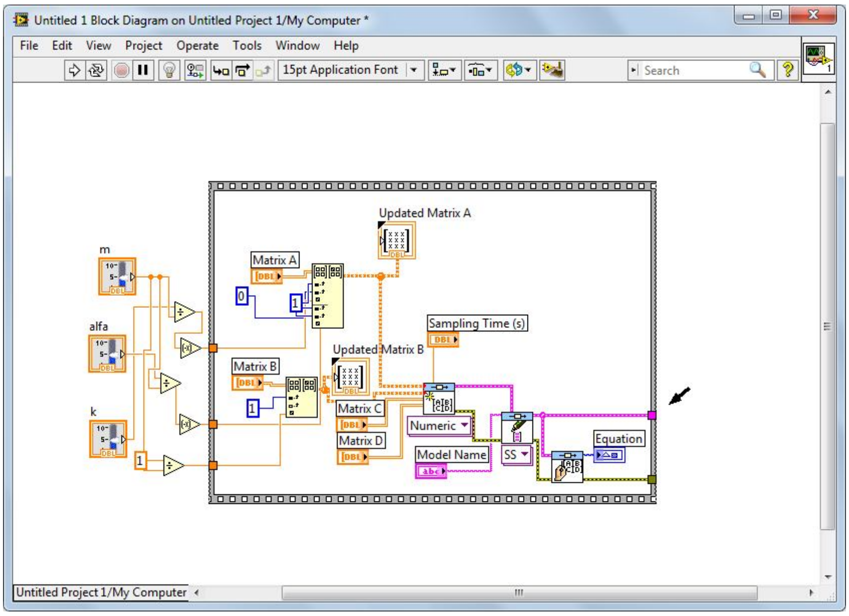
ponieważ

$$X' = Ax + Bu$$
$$Y = Cx + Du$$

otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{\alpha}{m} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{m} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$
$$C = [1 \quad 0]; D = [0]$$

W LabView model w postaci przestrzeni stanu wprowadza się np. poprzez zadajnik modelu w przestrzeni stanu CD Create State-Space. Można do macierzy podłączyć zadajniki wielości m, alfa, k.

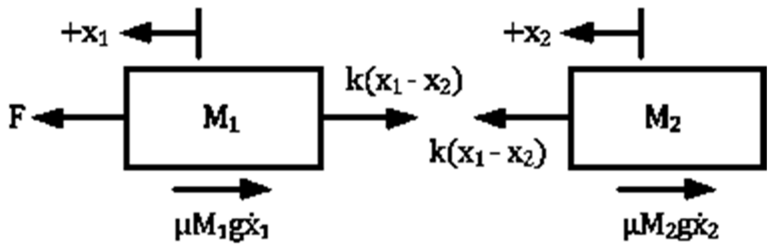



Strzałka pokazuje wyjściowy klaster zawierający opis modelu w przestrzeni stanu.

**Przykład II**

Rozważmy model pociągu składającego się z lokomotywy i wagonu połączonych sprężyną. Masa lokomotywy i wagonu będzie reprezentowana odpowiednio przez zmienne $M_1$ i $M_2$, $k$ to współczynnik sprężystości sprężyny, $F$ oznacza siłę wywieraną przez silnik lokomotywy, µ (lub *u*) oznacza współczynnik tarcia tocznego.

System może być reprezentowany przez następujący diagram:



Z prawa Newtona wiadomo, że suma sił działających na masę równa się masie razy jej przyspieszenie. W tym przypadku siły działające na masę $M_1$ to oddziaływanie sprężyny, siła tarcia i siła wywierana przez silnik napędzający skład. Siły działające na $M_2$ to oddziaływanie sprężyny i siła tarcia. W kierunku pionowym siła grawitacji jest równoważona przez siłę reakcji wywieraną przez ziemię, zatem nie istnieje przyspieszenie w kierunku pionowym. Równania ruchu w kierunku poziomym są następujące:

$$M_1\ddot{x}_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g\dot{x}_1$$
$$M_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_2 g\dot{x}_2$$

Ten zestaw równań można zmodyfikować do postaci zmiennej stanu. Zmienne stanu to pozycje (drogi), $x_1$ i $x_2$ oraz prędkości $v_1$ i $v_2$; wymuszeniem jest siła $F$. Równania zmiennych stanu będą wyglądać następująco:

$$\dot{x}_1 = v_1$$
$$\dot{v}_1 = -\frac{k}{M_1}x_1 - \mu g v_1 + \frac{k}{M_1}x_2 + \frac{F}{M_1}$$
$$\dot{x}_2 = v_2$$
$$\dot{v}_2 = \frac{k}{M_2}x_1 - \frac{k}{M_2}x_2 - \mu g v_2$$

Niech prędkość lokomotywy będzie sygnałem wyjściowym układu. Wtedy równanie wyjścia ma postać:

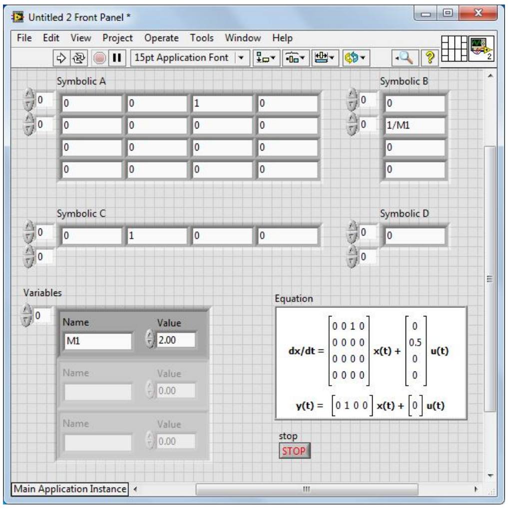
$$y = v_1$$

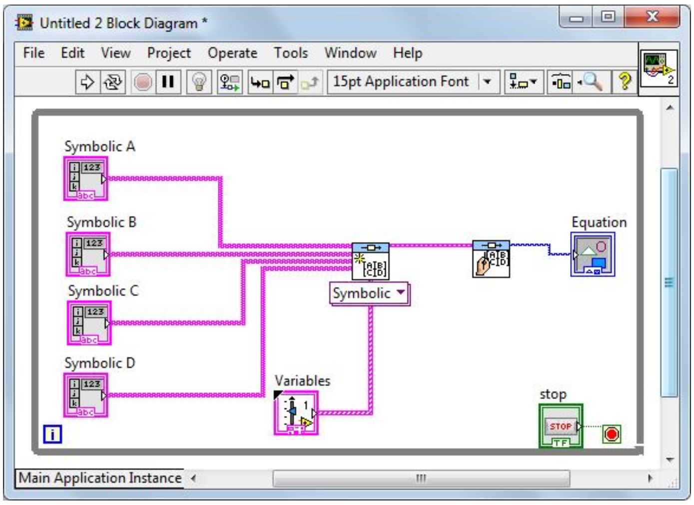
Innym sposobem na rozwiązanie problemu jest użycie modelu w przestrzeni stanu. Cztery macierze A, B, C i D charakteryzują zachowanie systemu i będą wykorzystywane w celu jego zamodelowania. Postać modelu w przestrzeni stanu, która wynika z równań opisujących obiekt wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{v}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{k}{M_1} & -\mu g & \frac{k}{M_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{k}{M_2} & 0 & -\frac{k}{M_2} & -\mu g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}[F]$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ v_1\\ x_2\\ v_2\end{bmatrix} + [0][F]$$

Aby zamodelować układ w przestrzeni stanu należy użyć CD Construct State-Space Model VI oraz CD Draw State-Space Equation VI. Zmieniając parametry w przednim panelu można zaobserwować zmiany w opisie modelu. Schemat blokowy i panel przedni powinny wyglądać np. jak poniżej:



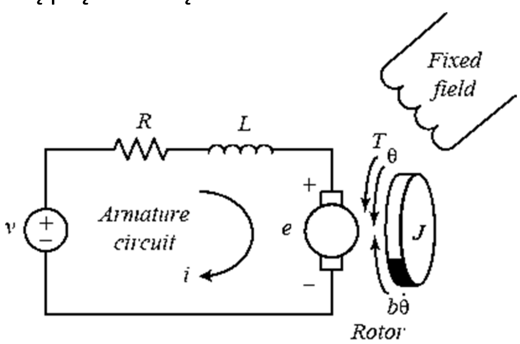

## 2. Zadania do wykonania

Zestaw I:

1. Zamodelować układ lokomotywa-wagon w przestrzeni stanu.
2. Rozszerzyć wektor wyjść o prędkość wagonu
3. Zarejestrować odpowiedź skokową i impulsową układu tj. prędkości lokomotywy i wagonu dla parametrów:
   $M_1$ = [liczba liter w imieniu] *100 kg
   $M_2$ = [dzień miesiąca] * 100 kg
   μ - 0.005 s/m
   k = [liczba liter w nazwisku] N/s
   F = [dowolna z przedziału 100-10000] N
   g = 9.8 m/s$^2$
4. Rozbudować powyższy model o drugi wagon o takiej samej masie podłączony za pomocą sprężyny o takim samym współczynniku sprężystości.
5. Rozszerzyć wektor wyjść o prędkość drugiego wagonu.
6. Opisać proces tworzenia modelu, zapisać wzory i macierze opisujące rozbudowany model w przestrzeni stanu.
7. Wyznaczyć odpowiedź rozbudowanego obiektu na skok jednostkowy oraz impulsowy, wyznaczyć ch-ki Nyquista oraz Bodego.

Zestaw II:

1. Zamodelować silnik prądu stałego (rysunek poniżej), gdzie wymuszeniem jest napięcie zasilania *V*, a odpowiedzią prędkość kątowa wału $\dot{\theta}$.



J – moment bezwładności wirnika = 0.01 kg*m^2
B – współczynnik tarcia wiskotycznego = 0.1 N*m*s
$K_e$ – stała siły elektromotorycznej = 0.02 V/rad/s
$K_t$ – stała momentu silnika = 0.02 N*m/A
R – rezystancja zastępcza = 1 Ohm
L – indukcyjność zastępcza = 0.5 H
Założenia:
Występuje tarcie wiskotyczne proporcjonalne do prędkości kątowej wału.
Stałe pole magnetyczne.
Moment wytwarzany przez silnik jest proporcjonalny do prądu wg zależności

$$T = K_t i$$

SEM silnika *e* jest proporcjonalne do prędkości kątowej wału

$$e = K_e \dot{\theta}$$

Równania opisujące silnik:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = K_t i$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K_e\dot{\theta}$$

2. Opisać proces tworzenia modelu, zapisać wzory i macierze opisujące rozbudowany model w przestrzeni stanu oraz transmitancyjny.
3. Wyznaczyć odpowiedź modelu silnika na skok jednostkowy oraz impulsowy, wyznaczyć ch-ki Nyquista oraz Bodego.