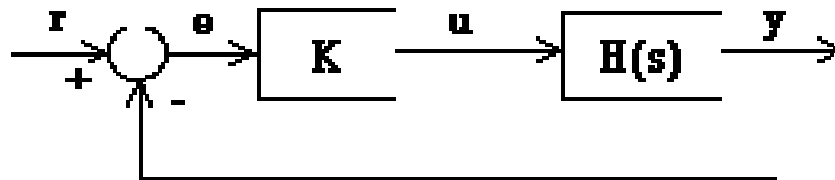


# Laboratorium Teorii i Techniki Sterowania

## TTS08: Metoda linii pierwiastkowych

### 1. Pierwiastki układu zamkniętego

Linia pierwiastkowa transmitancji układu otwartego  $H(s)$  jest wykresem przedstawiającym umiejscowienie wszystkich możliwych pierwiastków układu zamkniętego. Wykres taki otrzymuje się przyjmując za zmienną jeden z parametrów układu np. wzmocnienie  $k$  i stosując bezpośrednie sprzężenie zwrotne:



Rys. 1. Układ z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego.

Jeżeli transmitancja układu zamkniętego wyrażona jest następująco:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KH(s)}{1 + KH(s)}$$

to, bieguny układu zamkniętego są pierwiastkami równania charakterystycznego  $1 + K*H(s) = 0$ .

Jeśli użyje się relacji  $H(s) = b(s)/a(s)$ , to poprzednie równanie przyjmie postać:

$$a(s) + Kb(s) = 0$$

lub

$$\frac{a(s)}{K} + b(s) = 0$$

Niech  $n$  stanowi rząd wielomianu  $a(s)$  oraz  $m$  - rząd wielomianu  $b(s)$ .

Rozważmy wszystkie dodatnie wartości  $k$ . Dla granicy przy  $k \rightarrow 0$ , bieguny układu zamkniętego to pierwiastki równania  $a(s) = 0$  czyli bieguny funkcji  $H(s)$ . Dla granicy przy  $k \rightarrow$  nieskończoności, bieguny układu zamkniętego to pierwiastki równania  $b(s) = 0$  czyli zera funkcji  $H(s)$ .

Nie ma znaczenia co podstawimy za  $k$ , ponieważ układ zamknięty zawsze musi mieć  $n$  biegunów, gdzie  $n$  jest liczbą biegunów funkcji  $H(s)$ . Linia pierwiastkowa musi mieć  $n$  gałęzi, każda gałąź zaczyna się w biegunie funkcji  $H(s)$  i biegnie do zera funkcji  $H(s)$ . Jeśli  $H(s)$  ma więcej biegunów niż zer (co jest częstym przypadkiem) to  $m < n$  i mówimy, że  $H(s)$  ma zera w nieskończoności. W takim przypadku, granica  $H(s)$  przy  $s \rightarrow$  nieskończoności równa jest 0. Liczba zer w nieskończoności równa jest  $n-m$  (liczba biegunów minus liczba zer) i stanowi liczbę gałęzi linii pierwiastkowej, które biegną do nieskończoności (asymptoty).

Ponieważ linia pierwiastkowa stanowi lokalizację wszystkich możliwych biegunów układu zamkniętego, z linii pierwiastkowej możemy wybrać wzmocnienie w taki sposób, że nasz układ zamknięty będzie działał w żądany sposób.

Jeśli jakkolwiek z wybranych biegunów znajduje się w prawej półpłaszczyźnie układ zamknięty będzie niestabilny. Bieguny, które są najbliżej osi urojonej mają największy wpływ na odpowiedź układu zamkniętego, więc nawet jeśli układ ma 3 lub 4 bieguny, może zachowywać się jak system 2-go lub nawet 1-go stopnia w zależności od lokalizacji dominującego(-ych) biegunu(-ów).

## 2. Wykreślanie linii pierwiastkowej dla danej transmitancji

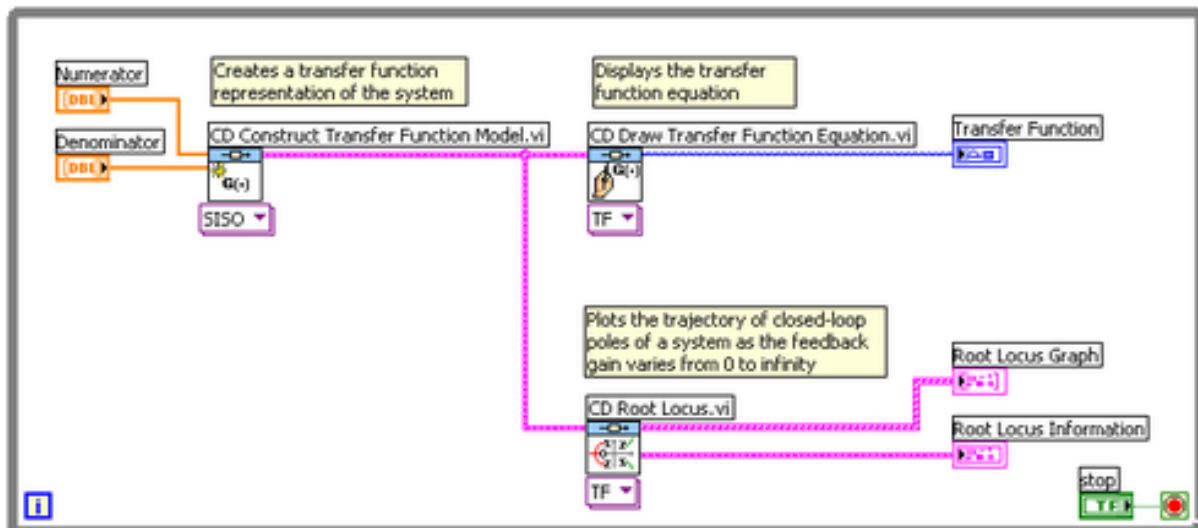
Rozważmy układ z otwartą pętlą, którego transmitancja jest następująca:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 7}{s(s + 5)(s + 15)(s + 20)}$$

Założenia dotyczące projektowanego regulatora to przeregulowanie max. 5% i czas narastania max. 1s.

### Sposób graficzny LabVIEW

Możemy utworzyć VI, aby wykreślić linię pierwiastkową używając CD Root Locus VI z sekcji Model Construction palety Control Design.

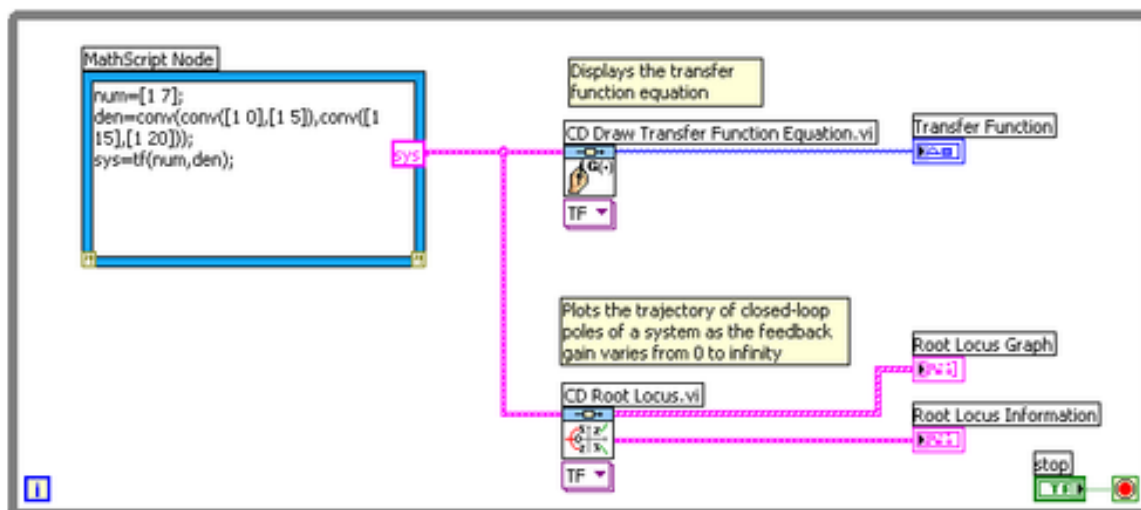


Rys. 2. Schemat blokowy VI do wykreślenia linii pierwiastkowych.

### Podjęcie hybrydowe graficzne/MathScript

Można także użyć MathScript Node i poniższy kod, aby wykreślić linie pierwiastkowe:

```
num=[1 7];  
den=conv(conv([1 0],[1 5]),conv([1 15],[1 20]));  
sys=tf(num,den);
```



Rys. 3. Schemat blokowy VI do wykreślania linii pierwiastkowych z użyciem MathScript Node.

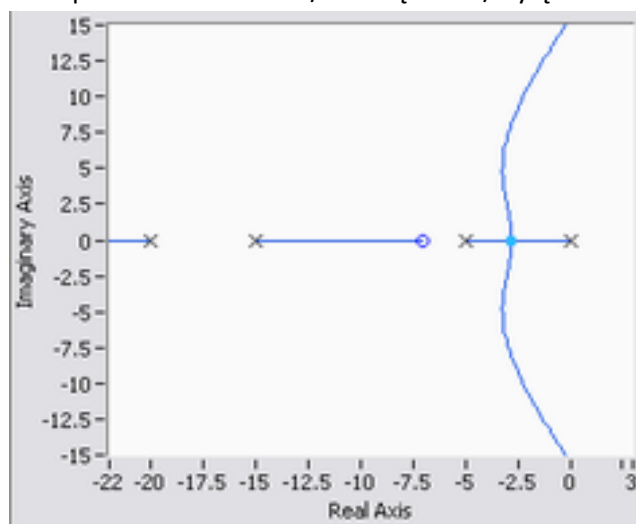
## Sposób MathScript

Kolejnym sposobem na rozwiązanie problemu jest użycie MathScript Window. Wybierz Tools » MathScript Window i wpisz następujący kod w Command Window:

```
num=[1 7];
den=conv(conv([1 0],[1 5]),conv([1 15],[1 20]));
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
axis([-22 3 -15 15])
```

## Wyniki

Każdy z zaprezentowanych sposobów powinien zwrócić wynik podobny do wykresu z rys. 4. (Uwaga, może być konieczne przeskalowanie osi i/lub włączenie/wyłączenie autoskalowania osi).



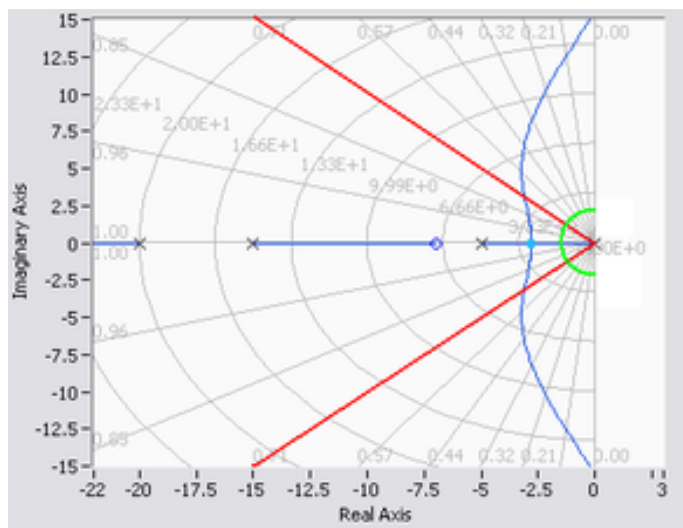
Rys. 4. Wykres linii pierwiastkowej.

## 3. Dobór wartości wzmocnienia $k$ na podstawie linii pierwiastkowej.

Wykres z rys. 4. prezentuje wszystkie możliwe lokalizacje biegunów układu zamkniętego dla regulatora proporcjonalnego. Naturalnie, nie wszystkie z tych biegunów spełnią wcześniej sprecyzowane założenia.

Chcemy określić jakie umiejscowienie biegunów jest akceptowalne. Warto do tego wykorzystać komendę `sgrid on` (MathScript RT Module) aby wyświetlić linie stałego współczynnika tłumienia i częstotliwości własnej. W naszym przypadku chcemy, aby przeregulowanie było mniejsze niż 5% co oznacza, że współczynnik tłumienia "zeta" jest większy od 0.7 oraz czas narastania mniejszy niż 1 sekunda, co oznacza, że częstotliwość własna "wn" jest większa od 1.8.

Wpisz komendę `sgrid on` w oknie komend MathScript i naciśnij Enter. Powinieneś zobaczyć figurę podobną do poniższej. Czerwona i zielona linia zostały nałożone na wykres w drodze późniejszej edycji.



Rys. 6. Wykres linii pierwiastkowej z liniami siatki.

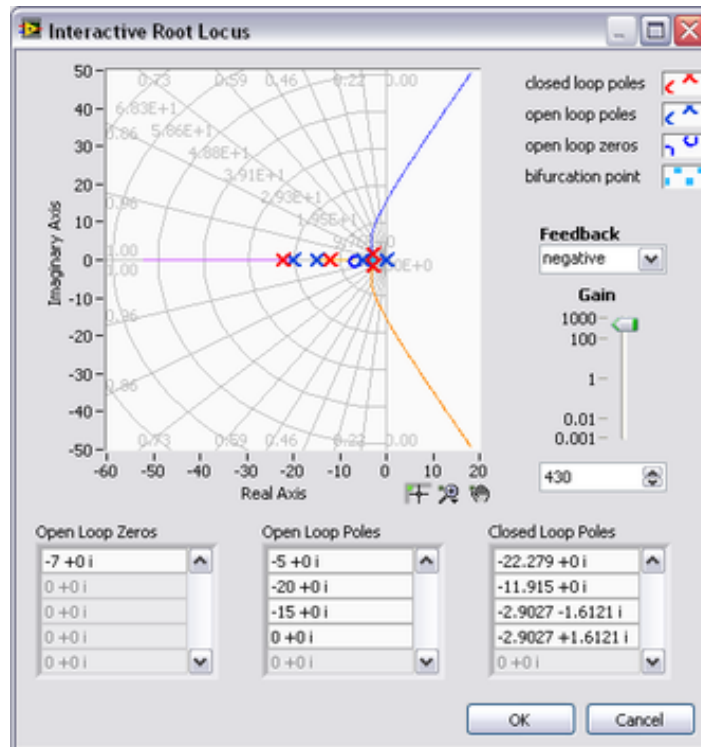
Na wykresie powyżej, ukośna linia wskazuje stały wsp. tłumienia, natomiast półkole wskazują linie stałej częstotliwości własnej. Czerwone linie nałożone na wykres wskazują lokalizacje biegunów ze współczynnikiem tłumienia na poziomie 0.7. Ulokowanie biegunów pomiędzy tymi liniami da wsp. tłumienia  $> 0.7$ , natomiast ulokowanie na zewnątrz tych linii da wsp. tłumienia  $< 0.7$ . Zielone półkole wskazuje lokalizacje biegunów z częstotliwością własną  $= 1.8$ , wewnątrz półkole częstotliwość własna będzie  $< 1.8$ , a na zewnątrz częstotliwość własna będzie  $> 1.8$ .

Wracając do naszego problemu, aby uzyskać przeregulowanie mniejsze niż 5% bieguny muszą znaleźć się pomiędzy dwoma czerwonymi liniami, a aby uzyskać czas narastania mniejszy niż 1 sekunda bieguny muszą znaleźć się poza zielonym półkolem. Widać zatem, że tylko fragment linii pierwiastkowej spełnia postawione wymagania. Wszystkie bieguny w tej lokalizacji znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zatem układ zamknięty będzie stabilny.

Z wykresu powyżej można wywnioskować, że część linii pierwiastkowej znajduje się wewnątrz żądanego obszaru. Można wykorzystać komendę `rlocfind` w MathScript Window, aby wybrać żądane bieguny na linii pierwiastkowej :

`[k,poles] = rlocfind(sys)`

Należy kliknąć na wykresie i przeciągnąć bieguny układu zamkniętego, aby określić gdzie mają się znaleźć. Można także skorzystać z punktów wskazanych na wykresie poniżej, aby zrealizować założenia projektowe.



Rys. 7. Interaktywny wykres linii pierwiastkowej w MathScript.

Zauważ, że ponieważ linia pierwiastkowa może mieć więcej niż jedną gałąź. Przesuwając jeden biegun na wykresie można zobaczyć gdzie znajdują się pozostałe bieguny oraz dla jakiego wzmocnienia występuje dany rozkład pierwiastków i zer. Uwaga, pozostałe bieguny także wpływają na odpowiedź układu. Z powyższego wykresu wynika, że wszystkie bieguny są na rozsądnych pozycjach. Możemy użyć wyznaczonego wzmocnienia w naszym regulatorze proporcjonalnym. Kliknij OK, aby wybrać wyświetlane bieguny.

## 4. Odpowiedź układu zamkniętego

Aby wykreślić odpowiedź skokową i sprawdzić czy synteza regulatora potwierdza założenia projektowe należy wyznaczyć transmitancję układu zamkniętego. Można obliczyć ją manualnie lub wykorzystać do tego celu LabVIEW i MathScript Window. Wpisz:

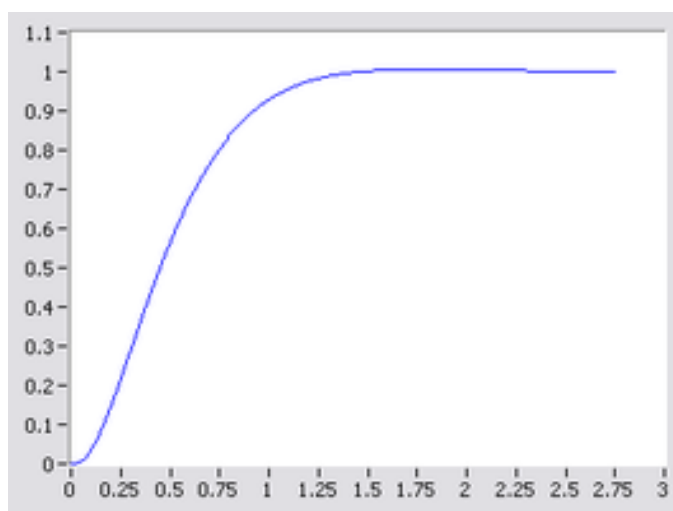
```
sys_cl=feedback(k*sys,1)
```

Dwa argumenty w funkcji feedback to licznik i mianownik transmitancji układu zamkniętego. Powyższy zapis uwzględnia wzmocnienie, które uprzednio zostało wyznaczone. Sprzężenie zwrotne traktowane jest jako bezpośrednie.

Ostatecznie, sprawdź odpowiedź skokową układu zamkniętego wpisując:

```
step(sys_cl)
```

w MathScript Window.



Rys. 8. Odpowiedź układu zamkniętego.

Jak można było się spodziewać, charakterystyka skokowa układu zamkniętego ma przeregulowanie mniejsze niż 5% i czas narastania mniejszy niż 1 sekunda.

## 5. Zadania do wykonania

1. Wykorzystaj metodę linii pierwiastkowych do wyznaczenia wzmocnienia regulatora proporcjonalnego dla układu z powyższego przykładu. W sprawozdaniu należy zamieścić wyznaczone wzmocnienie wraz z widokiem rozmieszczenia biegunów układu zamkniętego oraz odpowiedź skokową układu zamkniętego. Czy założenia zostały spełnione?

2. Dobierz wzmocnienie regulatora proporcjonalnego ( $K$ ) metodą linii pierwiastkowych dla układu z rys. 1. gdzie transmitancja obiektu wynosi:

a. 
$$H(s) = \frac{(s+1)s}{(s+3)(s+10)(s+30)}$$

b. 
$$H(s) = \frac{(s+1)(s+10)}{(s+2)(s+20)(s+50)}$$

c. 
$$H(s) = \frac{(s+1)s(s+5)(s+6)}{(s+3)(s+10)(s+20)(s+22)}$$

d. 
$$H(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+6)s(s+30)}$$

e. 
$$H(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10+j2)(s+10-j2)}$$

f. 
$$H(s) = \frac{(s+1)s}{(s+3+j3)(s+3-j3)(s+30)}$$

g. 
$$H(s) = \frac{(s+1)(s+4)(s+6)}{(s+3)(s+10)(s+15)(s+15)}$$

h. 
$$H(s) = \frac{(s+10)}{(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)}$$

i. jeden z obiektów do ćw. 7. (określony przez prowadzącego)

Założenia projektowe przyjąć jak w powyższym przykładzie. Jeśli spełnienie założeń nie jest możliwe należy dobrać optymalne wzmocnienie na podstawie własnej opinii i uzasadnić. Proces doboru wzmocnienia, wykresy linii pierwiastkowych, odpowiedzi układu zamkniętego należy zamieścić w sprawozdaniu oraz skomentować.