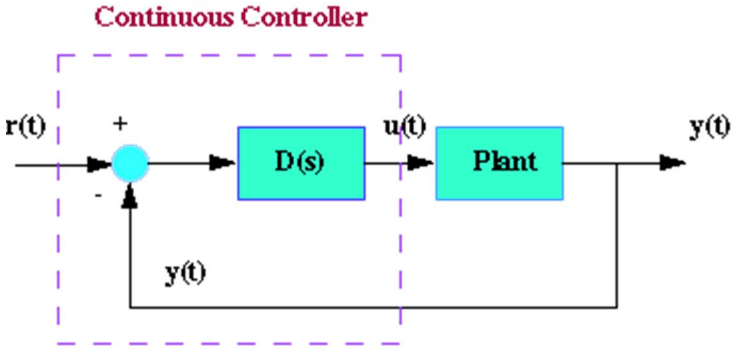
Laboratorium Teorii i Techniki Sterowania

TTS10: Regulatory cyfrowe

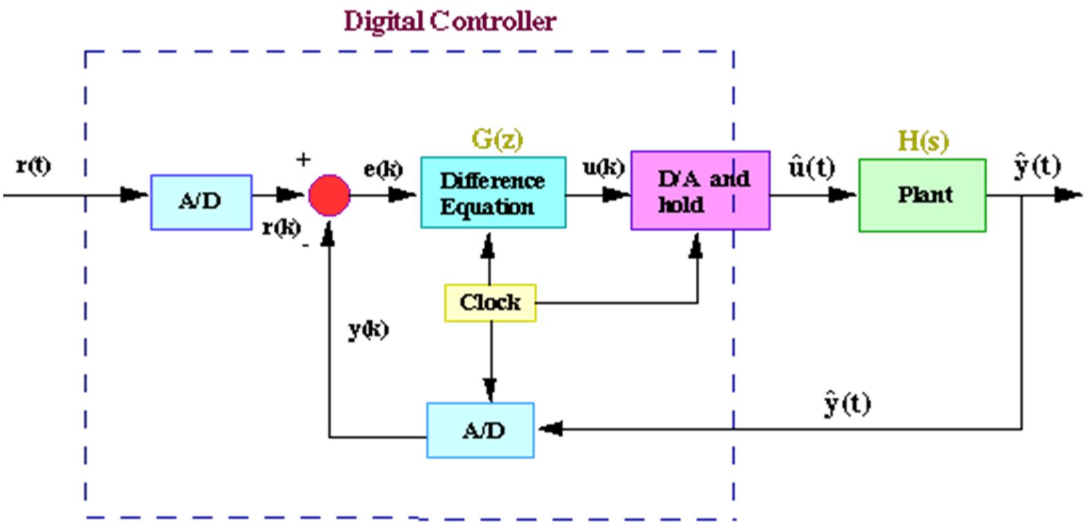
1. Wprowadzenie

Rys. 1. Przedstawia typowy, ciągły układ automatycznej regulacji, który był rozważany w poprzednich instrukcjach. Prawie wszystkie ciągłe regulatory mogą być zbudowane za pomocą elektroniki analogowej.



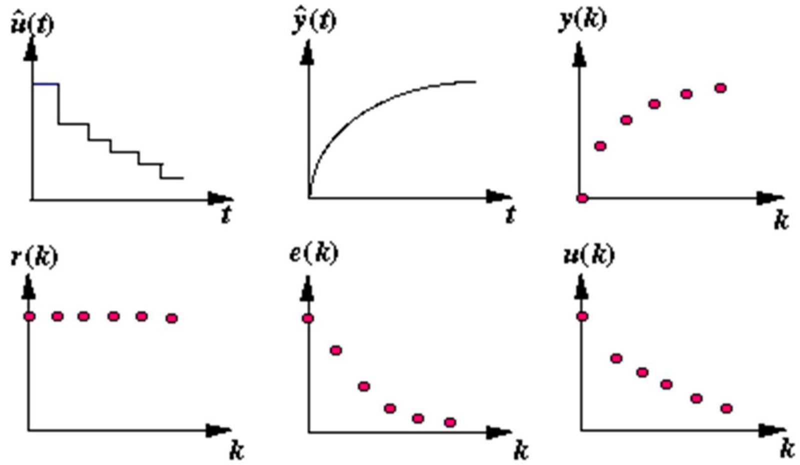
Rys. 1. Ciągły układ automatycznej regulacji.

Regulator ciągły obramowany linią przerywaną można zastąpić regulatorem cyfrowym zaprezentowanym poniżej na rys. 2. Realizuje on to samo zadanie regulacji co regulator ciągły. Podstawowa różnica między nimi polega na tym, że układy cyfrowe operują na sygnałach dyskretnych (lub próbkach danego sygnału), a nie na ciągłych sygnałach.



Rys. 2. Cyfrowy układ automatycznej regulacji.

Różne typy sygnałów na powyższym schemacie mogą być zaprezentowane poprzez następujące wykresy.

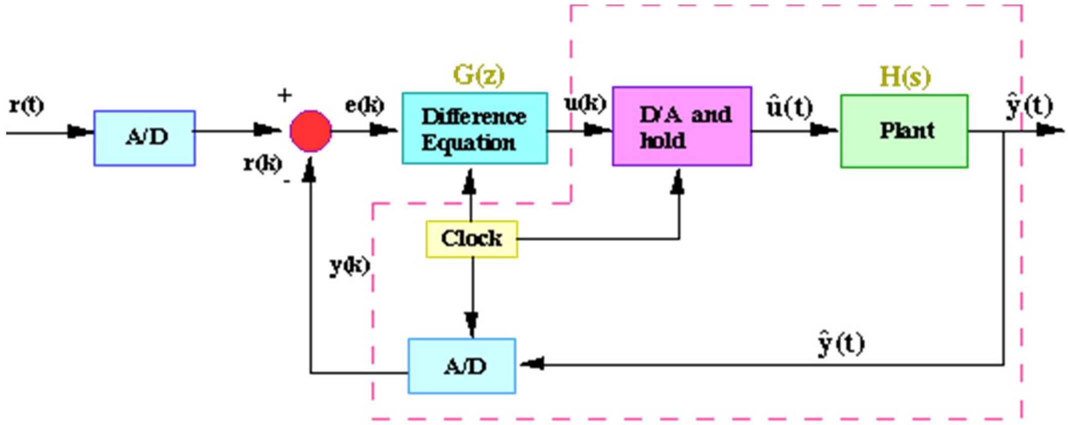


Rys. 3. Ciągłe i dyskretne sygnały

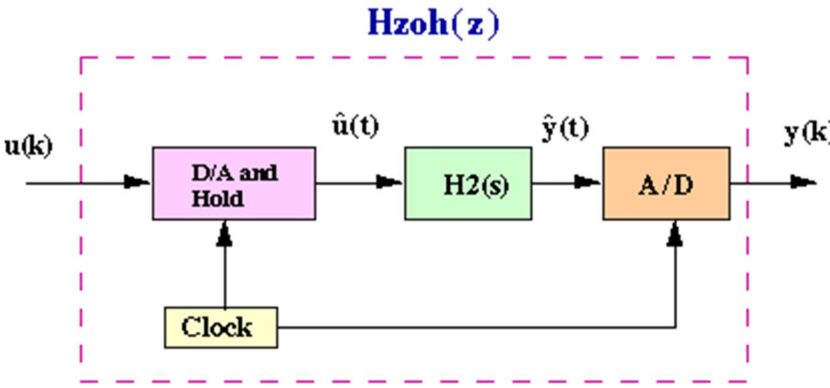
2. Ekstrapolator zerowego rzędu (Zero-order Hold, ZOH)

Na powyższym schemacie cyfrowego układu automatycznej regulacji występują sygnały zarówno dyskretne jak i ciągłe. Podczas projektowania cyfrowego UAR należy znaleźć dyskretną postać sygnałów ciągłych, dzięki czemu dalsze rozważania ograniczą się do sygnałów dyskretnych.

Zaznaczony fragment schematu z rys. 4 zostanie poddany przekształceniu.



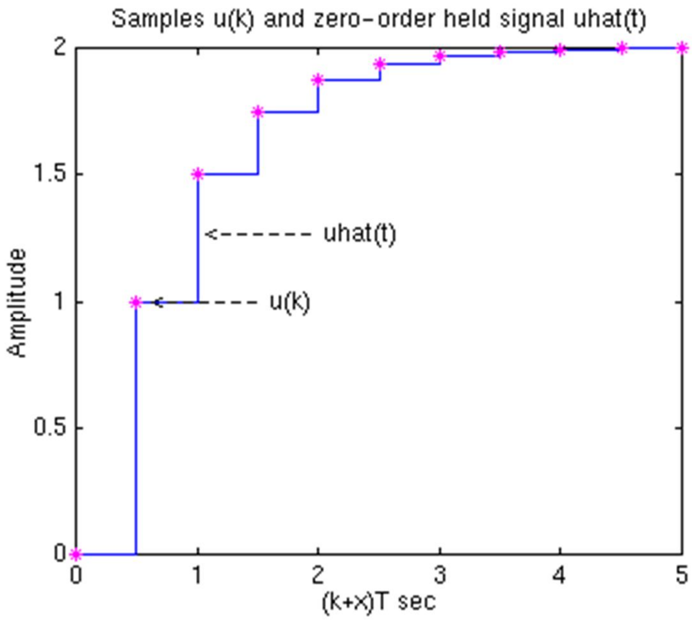
Rys. 4. Dyskretny UAR



Rys. 5. Przekształcony dyskretny UAR

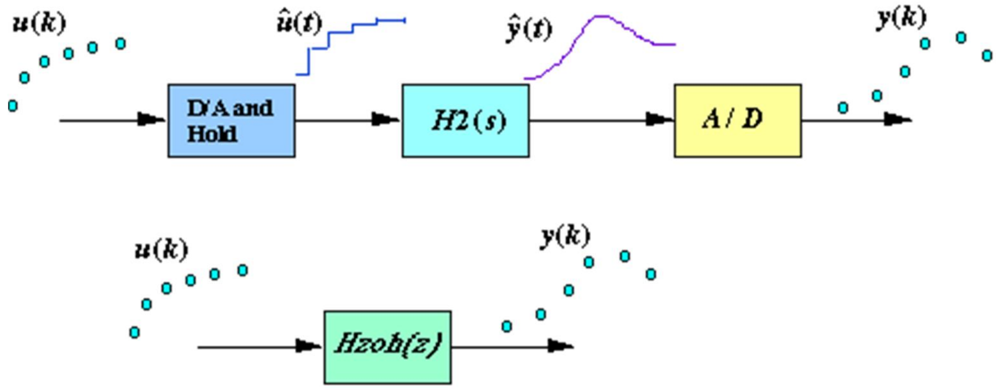
Sygnał zegarowy podłączony do przetworników cyfrowo-analogowego (D/A) oraz analogowo-cyfrowego (A/D) dostarcza impuls co *T* sekund, a każdy z przetworników wysyła sygnał tylko w momencie, gdy dociera do niego impuls z zegara. Celem stosowania impulsów zegarowych jest wymóg wypływający z rys. 5 – transmitancja fragmentu układu $H_{ZOH}(z)$ może przyjmować tylko próbki (sample) sygnału wejściowego *u(k)* i generuje tylko próbki sygnału wyjściowego *y(k),* a zatem transmitancja zastępcza tego fragmentu może być traktowana jako funkcja dyskretna: $H_{ZOH}(z)$

Przy analizie tego typu układu dąży się do znalezienia dyskretnej funkcji $H_{ZOH}(z)$ tak, że odcinkowo stały sygnał wejściowy $\hat{u}(t)$ trafia na ciągły obiekt *H(s)*, a próbkowany sygnał wyjściowy układu ciągłego $\hat{y}(t)$ równy jest dyskretnemu wyjściu *y(k)*. Niech sygnał *u(k)* reprezentuje próbkę sygnału wejściowego. Istnieją techniki umożliwiające uchwycenie i podtrzymanie wartości tej próbki przez określony czas (czas impulsowania *T*). Dzięki nim powstaje sygnał ciągły $u_{hat}(t)$ (uhat(t)). Rys. 6 prezentuje szkic przykładowej funkcji $u_{hat}(t)$, która utrzymuje stałą wartość *u(k)* przez czas od *kT* do *(k+1)T*. Operacja taka nosi nazwę ekstrapolacji zerowego rzędu (zero order hold, ZOH).



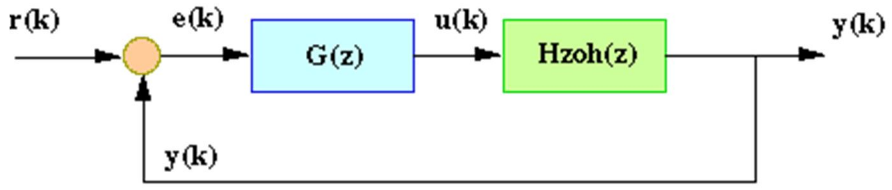
Rys. 6: Ekstrapolacja zerowego rzędu

Ekstrapolowany sygnał $u_{hat}(t)$ trafia na obiekt $H_2(s)$ (H2(s)), a następnie na przetwornik analogowo-cyfrowy, aby wytworzyć sygnał wyjściowy *y(k)*. Gdyby dyskretny sygnał *u(k)* biegł przez $H_{ZOH}(z)$ to powstałby odcinkowo identyczny dyskretny sygnał wyjściowy *y(k).*



Rys. 7. Sygnał wyjściowy

W dalszej kolejności schemat zostanie przekształcony tak, że w miejsce fragmentu ciągłego wstawiona zostanie dyskretna transmitancja zastępcza $H_{ZOH}(z)$.



Rys. 8. Przekształcony schemat.

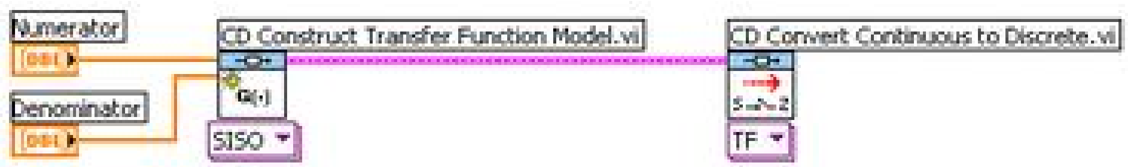
Wstawiając tę transmitancję dyskretną można projektować cyfrowy układ automatycznej regulacji bazując wyłącznie na dyskretnych funkcjach.

Istnieją pewne przypadki, gdzie dyskretne odpowiedzi nie pasują do analogicznych odpowiedzi ciągłych, co jest spowodowane obecnością układów podtrzymywania sygnału w układach cyfrowych. W tych przypadkach podtrzymanie powoduje powstawanie efektu opóźnienia w odpowiedziach dyskretnych. Efekt ten może zostać zredukowany poprzez zmniejszanie okresu próbkowania.

3. Konwersja układu ciągłego na układ dyskretny

Sposób graficzny LabVIEW

Aby przekonwertować układ ciągły na dyskretny można wykorzystać blok CD Convert Continuous to Discrete VI z sekcji Model Conversion palety Control Design.



Rys. 9. Konwersja modelu ciągłego na dyskretny.

Sposób wykorzystujący MathScript

Należy wykorzystać funkcję nazwaną *c2d*, która także konwertuje dany układ ciągły na jego dyskretny odpowiednik. Na przykład: sys_d = c2d(sys,Ts,'zoh').

Wyniki

Obydwa zaprezentowane sposoby używają ekstrapolacji zerowego rzędu wyjaśnionej powyżej.

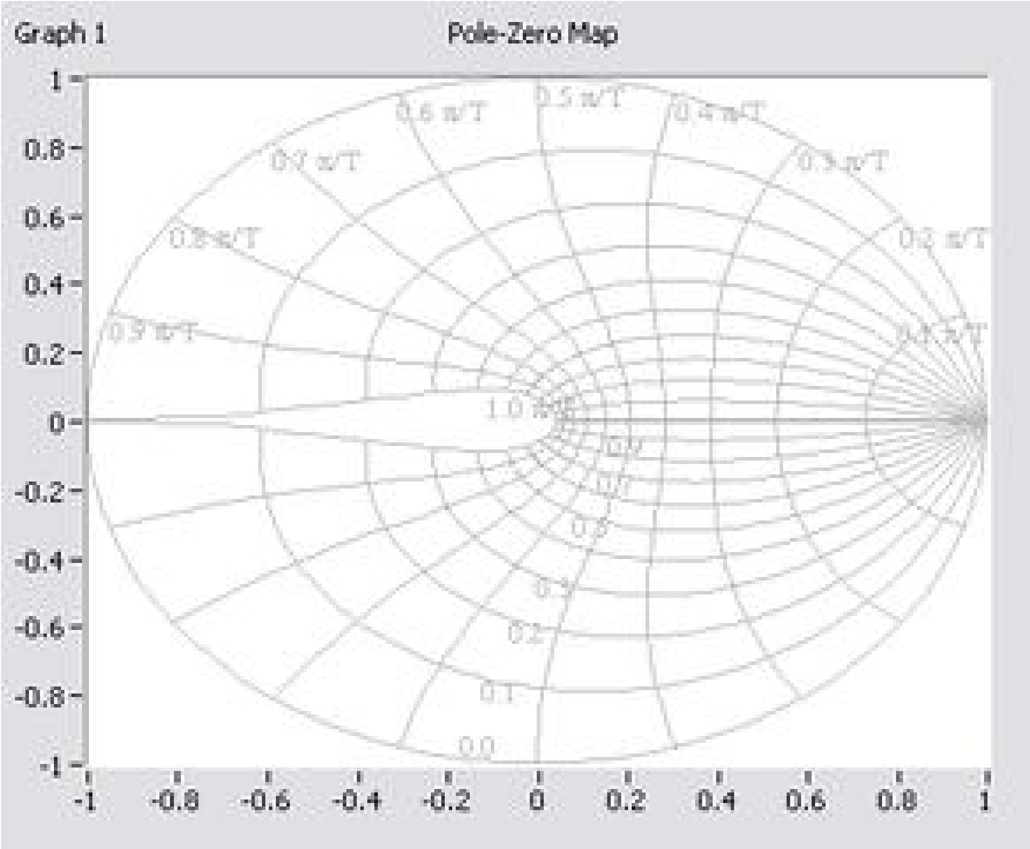
4. Stabilność i przebieg przejściowy

W przypadku układów ciągłych wiadomo, że pewne zachowania (dynamika układu) są wynikiem różnych, określonych lokacji biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej *s*. Na przykład: układ jest niestabilny, jeśli choć jeden biegun jest zlokalizowany w prawej półpłaszczyźnie. W przypadku układów dyskretnych można analizować zachowania układu dla różnych lokacji biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej *z*. Charakterystyki na płaszczyźnie *z* mogą zostać odniesione do odpowiadających im ch-k na płaszczyźnie *s* poprzez równanie:

$$z = e^{sT}$$

W równaniu tym, *T* to okres próbkowania (sekundy/próbkę), *s* i *z* to zmienne zespolone.

Rys. 10 prezentuje położenie (mapę) linii stałego współczynnika tłumienia ζ i częstotliwości własnej układu ω_n (Wn) dla płaszczyzny zmiennej zespolonej *z* przeliczone z powyższej zależności.



Rys. 10. Płaszczyzna zmiennej zespolonej *z*.

W przypadku płaszczyzny zmiennej *z* stabilność nie zależy od położenia pierwiastków względem osi urojonej, ale zależy od okręgu jednostkowego $|z| = 1$. Układ zamknięty jest stabilny, gdy wszystkie bieguny układu otwartego znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego i niestabilny, gdy choćby jeden biegun ukł. otwartego znajduje się poza tym okręgiem.

W analizie przebiegów przejściowych układów dyskretnych można wykorzystać poniższe wzory (słuszne także dla układów ciągłych):

$$\xi\omega_n \geq \frac{4.6}{T_s}$$

$$\omega_n = \frac{1.8}{T_r}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\ln\frac{P}{100})^2}{\pi^2 + (\ln\frac{P}{100})^2}}$$

$$P = 100 * e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

gdzie:

ζ – wsp. tłumienia,

ω_n – częstotliwość własna [rad/s],

T_s – czas ustalania [s],

T_r – czas narastania [s],

P – przeregulowanie [%].

UWAGA: Częstotliwość własna ω_n na płaszczyźnie zespolonej ma jednostki rad/próbkę (=rad/okres próbkowania), a w powyższych równaniach ω_n musi być w rad/s.

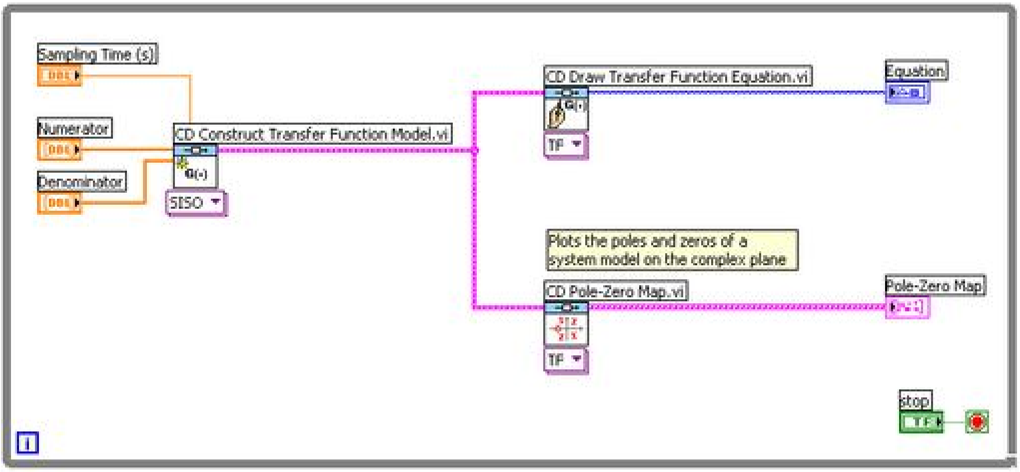
5. Kreślenie biegunów i zer układu dyskretnego

Dany jest obiekt opisany funkcją dyskretną:

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{z^2 - 0.3z + 0.5}$$

Sposób graficzny LabVIEW

Można wykreślić zera i bieguny tej funkcji używając bloku CD Pole-Zero Map.



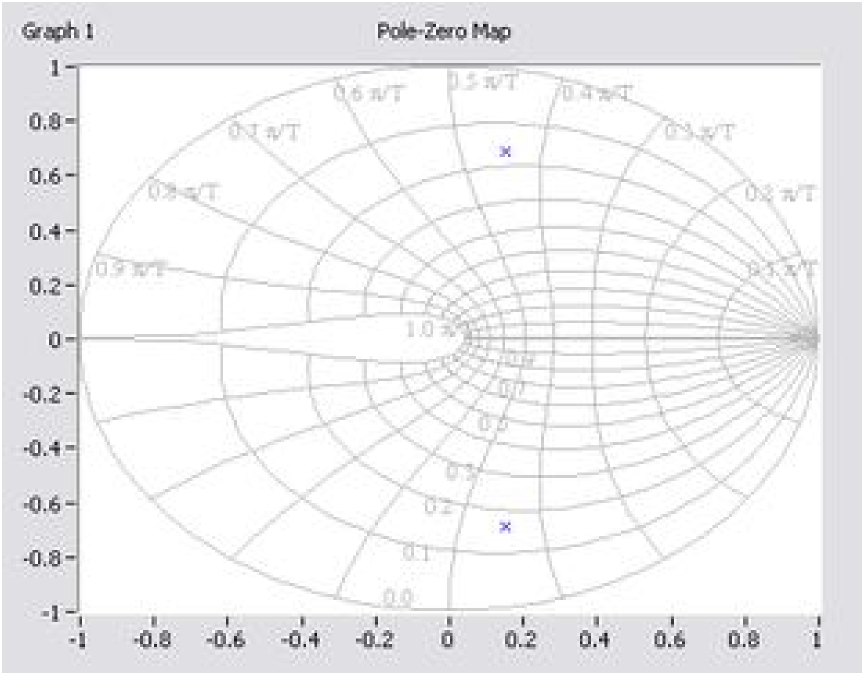
Rys. 11. Kreślenie zer i biegunów.

Sposób wykorzystujący MathScript

Należy otworzyć okno MathScript w wpisać poniższy kod. Uruchomienie tego m-pliku w linii komend spowoduje wykreślenie biegunów i zer wraz z liniami stałego wsp. tłumienia i częstotliwości własnej.

```
numDz = 1;
denDz = [1 -0.3 0.5];
sys = tf(numDz,denDz,1/20)
pzmap(sys)
axis([-1 1 -1 1])
zgrid on
```

Wyniki



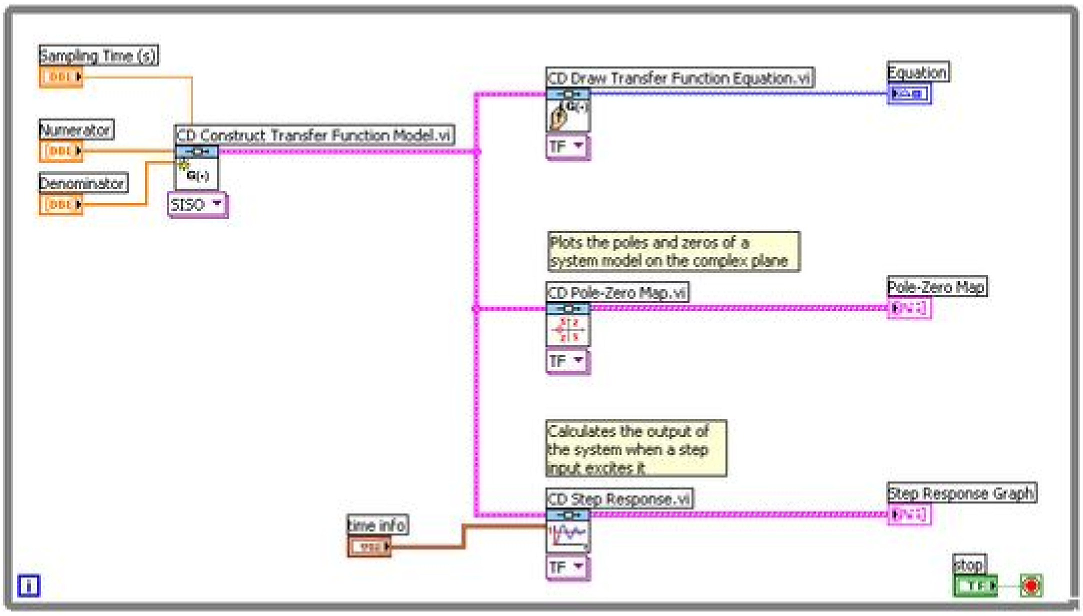
Rys. 12. Płaszczyzna zespolona „z" z biegunami i zerami transmitancji dyskretnej.

Na podstawie wykresu można stwierdzić, że bieguny znajdują się mniej więcej na częstotliwości własnej ok. $\frac{0.45\pi}{T} = \frac{9\pi}{20T}\frac{rad}{s}$ i współczynniku tłumienia ok. 0.16. Przyjmując okres próbkowania równy $\frac{1}{20}$ sekundy (co daje częstotliwość własną $\omega_n = 28.2\frac{rad}{s}$) i korzystając z równań powyżej (str. 5) można wyznaczyć czas narastania dla tego układu, który wynosi ok. 0.06s, czas regulacji ok. 1.02 s i przeregulowanie ok. 60%.

Kreśląc odpowiedź skokową obiektu można sprawdzić poprawność wyznaczonych wskaźników jakości regulacji.

Sposób graficzny LabVIEW

Należy dodać blok CD Step Response do schematu blokowego.



Rys. 13. Dodana odpowiedź skokowa

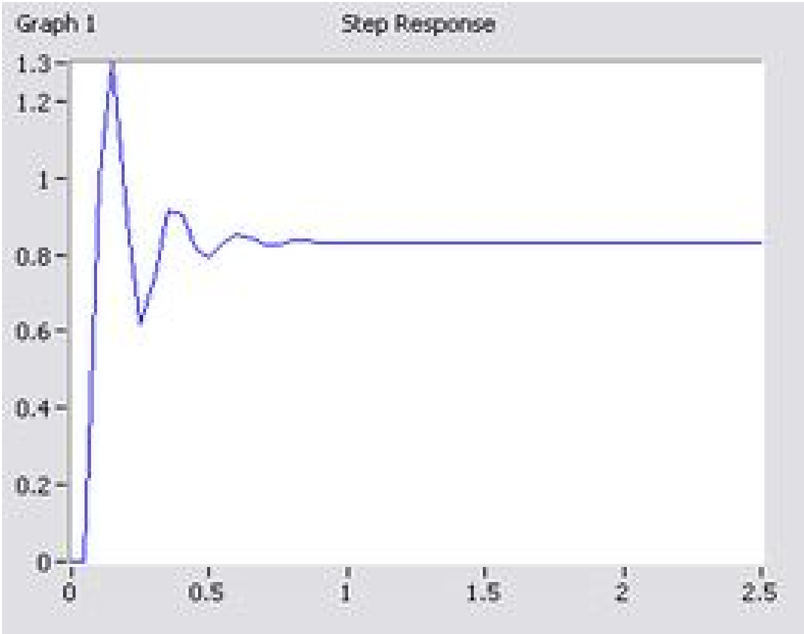
Sposób wykorzystujący MathScript

W przypadku użycia okna MathScript należy dodać poniższe linie kodu:

```
sys = tf(numDz,denDz,1/20);
step(sys,2.5);
```

Wyniki

Na ekranie powinna pojawić się następująca odpowiedź skokowa:



Rys. 14. Odpowiedź skokowa

Jak widać, czas narastania, ustalania oraz przeregulowanie niemalże pokrywają się z wartościami wyznaczonymi za pomocą równań. Pokazuje to jak wykorzystać lokalizację biegunów i powyższe równania do analizy przebiegów przejściowych układu.

6. Dyskretna linia pierwiastkowa

Linia pierwiastkowa jest to linia, na której mogą znaleźć się bieguny równania charakterystycznego, gdy pojedyncze wzmocnienie w torze głównym układu sterowania zmienia się od 0 do +∞. Równanie charakterystyczne układu z bezpośrednim sprzężeniem zwrotnym (ujemnym) ma postać:

$$1 + KG(z)H_{ZOH}(z) = 0$$

W równaniu tym *G(z)* to dyskretna transmitancja kompensatora zaimplementowanego w cyfrowym regulatorze, a $H_{ZOH}(z)$ to dyskretna transmitancja zastępcza obiektu.

Sposób wykreślania linii pierwiastkowych dla płaszczyzny „z” jest identyczny jak w przypadku płaszczyzny „s”. Należy przywołać tu instrukcję dotyczącą metody linii pierwiastkowych – w oknie MathScript należy użyć funkcji *sgrid on,* aby pokazać linie siatki, natomiast tu należy użyć komendy *zgrid on*. Pokazuje ona linie stałego współczynnika tłumienia ζ oraz częstotliwości własnej układu ω_n.

Dana jest następująca transmitancja dyskretna:

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{z - 0.3}{z^2 - 1.6z + 0.7}$$

Założenia projektowe:

- przeregulowanie mniejsze niż 52.5%,

- czas narastania T_r mniejszy niż 0,3 s
- okres próbkowania T równy 0.05 s

Parametry, które wiążą powyższe wartości z lokacjami biegunów to częstotliwość własna układu ω_n w rad/próbkę (okres próbkowania) oraz współczynnik tłumienia ζ. Na podstawie wiążących je równań (str. 5) można je obliczyć:

$$\xi \geq \sqrt{\frac{(\ln\frac{P}{100})^2}{\pi^2 + (\ln\frac{P}{100})^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln 52{,}5}{\pi * 100}\right)^2}{\pi^2 + \left(\frac{\ln 52{,}5}{\pi * 100}\right)^2}} = 0{,}2$$

$$\omega_n = \frac{1.8}{T_r} = \frac{1.8}{0{,}3} = 6\, rad/s$$

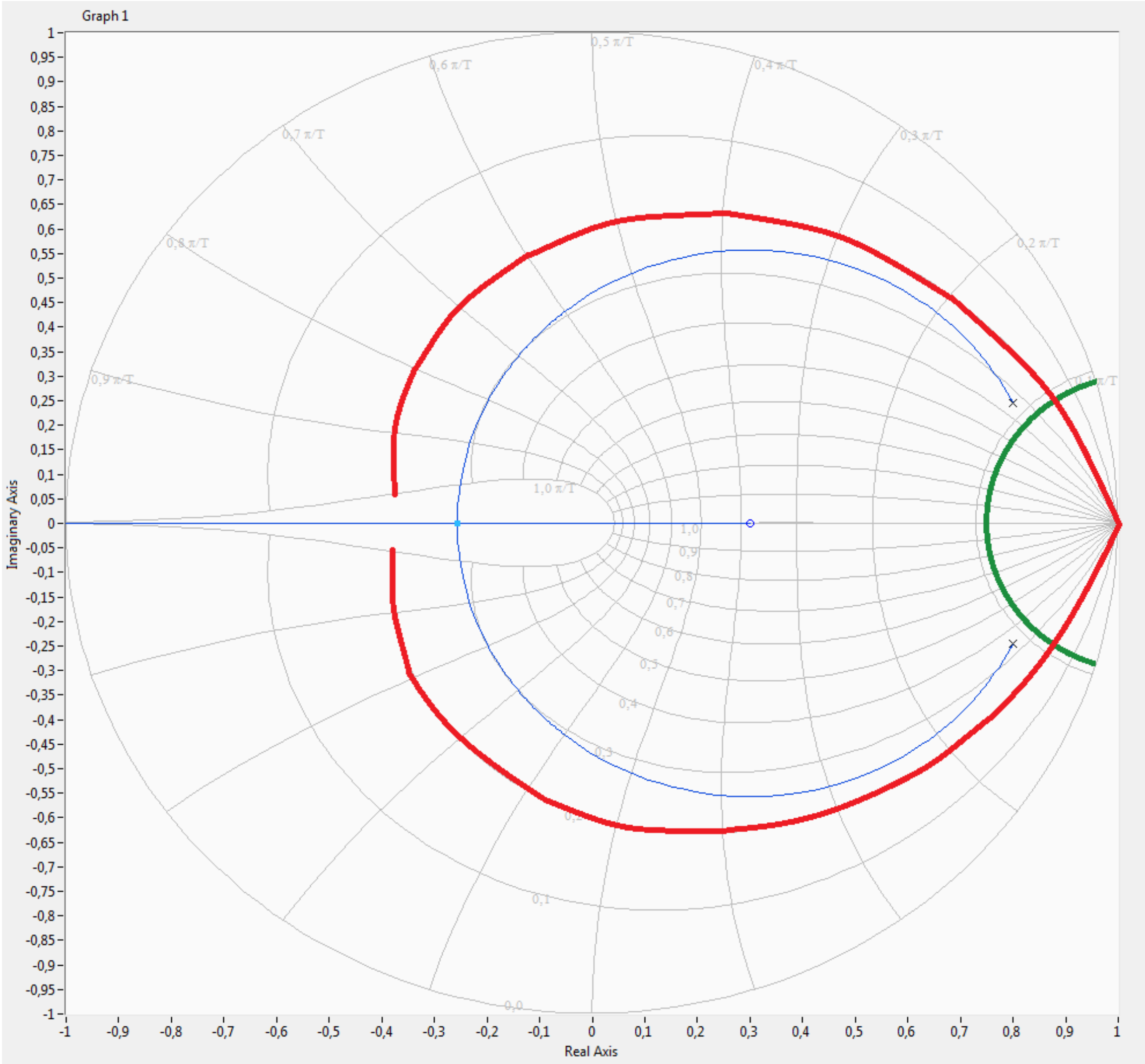
$$\omega_n\left[\frac{rad}{s}\right] = \omega_n * \frac{T}{1}\left[\frac{rad}{próbkę}\right] = 6 * \frac{0.05}{1} = 0.3\,\frac{rad}{próbkę}$$

Dalsze rozważania powinny uwzględniać, że wsp. tłumienia powinien być większy od 0.2, a częstotliwość własna układu większa niż 0.3 rad/próbkę.

Aby przeprowadzić syntezę metodą lokowania biegunów w oknie MathScript należy wpisać poniższy kod:

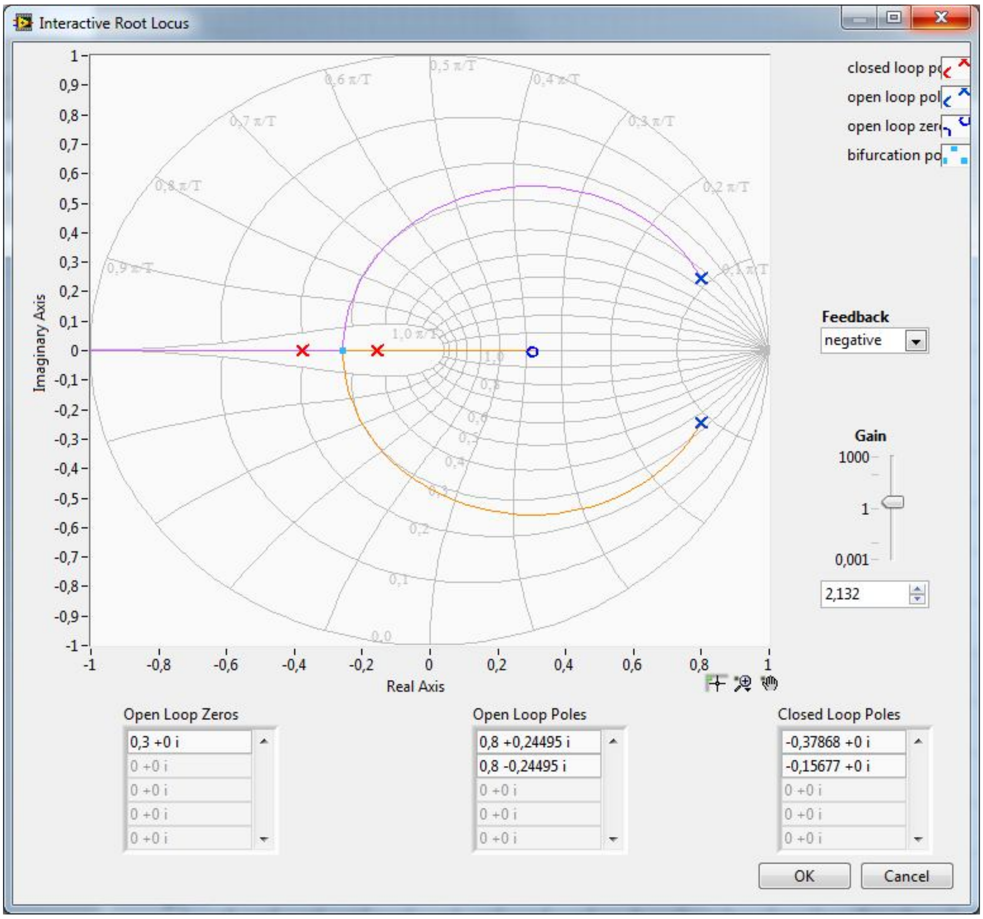
```
numDz = [1 -0.3];
denDz = [1 -1.6 0.7];
sys = tf(numDz,denDz,1);
rlocus(sys)
axis([-1 1 -1 1])
zgrid on
```

Ich uruchomienie spowoduje wyświetlenie płaszczyzny „z” z liniami pierwiastkowymi jak na rys. 15. Czerwona i zielona linia zostały nałożone na wykres.



Rys. 15. Dyskretna linia pierwiastkowa.

Z rys. 15 wynika, że sam układ po zamknięciu jest stabilny, ponieważ wszystkie bieguny znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego. Na powyższym rysunku czerwona nałożona linia wskazuje lokalizacje biegunów ze współczynnikiem tłumienia ζ równym 0.2. Analogicznie, zielona nałożona linia wskazuje lokalizacje biegunów z częstotliwością własną ω_n równą 0.3 rad/próbkę (= 0.0955*π/T). Częstotliwość własna jest większa od 0.3 na zewnątrz zielonej linii, a wsp. tłumienia jest większy od 0.2 wewnątrz czerwonej linii. Jak widać na rys. 15. przy dowolnym wzmocnieniu regulatora częstotliwość własna układu zamkniętego będzie większa od 0.3rad/próbkę (0.0955*π/T) czyli poza półokręgiem. Pozostaje zdecydować jaki zakres wzmocnień spełni warunek współczynnika tłumienia. W tym celu należy użyć komendy *rlocfind(sys)* w oknie MathScript (rys. 16.).



Rys. 16. Maksymalne wzmocnienie, które spełnia warunek wsp. tłumienia.

Z rys. 16. wynika, że przy wzmocnieniu ok. 2,132 jeden z biegunów zaczyna wychodzić na zewnątrz czerwonej linii z rys. 15, a przy wzmocnieniu 2,5384 jeden z biegunów znajduje się na okręgu jednostkowym, a tym samym układ znajduje się na granicy stabilności. Owocuje to drganiami niegasnącymi odpowiedzi czasowej układu zamkniętego, a wzmocnienie 2,5384 to wzmocnienie krytyczne.

Zadania do wykonania:

1. Dobierz wzmocnienie dyskretnego regulatora proporcjonalnego (K) metodą linii pierwiastkowych dla układu z powyższego przykładu.
2. Dany jest UAR jak na rys. 8. Gdzie transmitancja dyskretna obiektu wynosi $H(z) = \frac{0,2z^2+z-0,3}{2z^2-3z+1,3}$

   Jakie będzie w przybliżeniu optymalne wzmocnienie dające:
   a. minimum czasu narastania,
   b. minimum przeregulowania.

Pytania kontrolne:

1. Co to jest/znaczy ekstrapolator/Zero Order Hold/ZOH?
2. Kiedy dyskretne odpowiedzi obiektów nie pasują do analogicznych odpowiedzi ciągłych? Jak można zredukować ten negatywny efekt?
3. Jaka jest zależność między transformatą Laplace'a, a transformatą Z?
4. Kiedy dyskretny układ zamknięty jest stabilny/niestabilny?