

Eligiusz PAWŁOWSKI*

CYFROWE PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW PRÓBKOWANYCH NIERÓWNOMIERNIE

W referacie przedstawia się problematykę odtwarzania równomiernie rozmieszczonych w czasie wartości sygnału próbkowanego nierównomiernie. Zagadnienie to występuje między innymi w przypadku przetwarzania zmiennej w czasie wielkości mierzonej na sygnał częstotliwościowy, gdy mierzony jest okres sygnału w celu wyznaczenia częstotliwości. Algorytm resamplingu umożliwia uzyskanie równomiernie spróbkowanego sygnału na podstawie jego wartości rozmieszczonych nierównomiernie w czasie. Przedstawiony algorytm może być zastosowany w tych przypadkach, gdy częstotliwość sygnału niesie informację o wartości chwilowej przetwarzanej w systemie wielkości fizycznej. W szczególności może być przydatny w badaniach maszyn wirujących z wykorzystaniem przetworników obrotowo - impulsowych, badaniach przetworników z wyjściem częstotliwościowym w stanach dynamicznych, w tym również generatorów sterowanych napięciowo, badaniach stabilności generatorów lub częstotliwości sieci energetycznych.

Słowa kluczowe: cyfrowe przetwarzanie sygnału, próbkowanie nierównomierne, resampling, odtwarzanie sygnału.

1. WSTĘP

Liczne, powszechnie znane i wykorzystywane algorytmy cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS) opracowano przy założeniu, że próbki przetwarzanego sygnału są rozmieszczone równomiernie w czasie, tzn. że odstępy czasu pomiędzy wszystkimi kolejnymi próbkami są jednakowe [1], [6]. Założenie o równomiernym próbkowaniu sygnału powoduje, że wszelkie odstępstwa od stałości okresu próbkowania są traktowane jako zakłócenie wpływające negatywnie na uzyskiwane wyniki przetwarzania [3]. Przy takim podejściu, wpływ nierównomierności próbkowania na proces cyfrowego przetwarzania jest analizowany przez wielu autorów [5], [12], [13].

* Politechnika Lubelska, Wydział Elektryczny, Katedra Automatyki i Metrologii,
ul. Nadbystrzycka 38 A, 20-618 Lublin, e-mail: elekp@elektron.pol.lublin.pl

Jednocześnie jednak w praktyce występują sygnały, dla których uzyskanie próbek równomiernie rozmieszczonych w czasie jest bardzo trudne oraz technicznie i metrologicznie nieuzasadnione. Do sygnałów tego rodzaju należy np. wyjściowy sygnał częstotliwościowy przetwornika obrotowo - impulsowego, dla którego w naturalny sposób kolejne jego wartości, wyznaczone jako odwrotności z kolejnych okresów sygnału, są rozmieszczone nierównomiernie w czasie ze względu na zmieniającą się prędkość obrotową. W takich przypadkach rozpatrywanie nierównomierności próbkowania jako zakłócenia jest całkowicie nieuzasadnione, gdyż nierównomierność ta jest istotną i naturalną właściwością sygnału. W referacie porusza się problematykę cyfrowego przetwarzania takiej klasy sygnałów.

2. SYGNAŁY PRÓBKOWANE NIERÓWNOMIERNIE

Sygnał określony funkcją czasu $f(t)$ próbkowany równomiernie reprezentowany jest przez ciąg wartości $\{x(n)\}$ pobieranych z sygnału w chwilach czasowych $t(n)$ równo od siebie odległych o okres próbkowania T_s (1).

$$x(n) = f[t(n)], \quad t(n) = t_0 + n \cdot T_s, \quad T_s = \text{const.} \quad (1)$$

Stalność okresu próbkowania T_s jest podstawowym założeniem wykorzystywanych obecnie algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów. W rzeczywistości, w układach realizowanych praktycznie, okres próbkowania T_s nie jest stały, przy czym istotne jest, aby występująca nierównomierność nie przekraczała pewnych dopuszczalnych w danym zastosowaniu wartości. Nierównomierność próbkowania jest rozpatrywana w literaturze z różnych punktów widzenia [2], [3], [5], [12], [13]. W wielu przypadkach rzeczywisty okres próbkowania nierównomiernego T_s^* można przedstawić jako pewne niewielkie odstępstwo od okresu próbkowania równomiernego T_s , z uwzględnieniem składnika deterministycznego Δ_D oraz przypadkowego Δ_R (*jitter*). Chwile $t(n)$ pobierania kolejnych próbek nie są w takim przypadku rozmieszczone równomiernie w czasie (2):

$$t(n) = t_0 + \sum_{i=0}^n T_s^*(i), \quad T_s^*(i) = T_s + \Delta_D(i) + \Delta_R(i) \quad (2)$$

Znając parametry charakteryzujące składniki Δ_D i Δ_R można próbować dokonać rekonstrukcji próbek rozmieszczonych równomiernie [5], [12], albo też oszacować błędy odtwarzania sygnału [3] lub jego widma [13]. Takie podejście stosowane jest np. w analizie parametrów oscyloskopów cyfrowych, analizatorów widma itp.

Odmienna sytuacja ma miejsce, gdy zmiany czasu T_s^* są duże i nie mogą być wystarczająco dobrze opisane zależnością (2). Przykładowo, w dopplerowskim anemometrze ultradźwiękowym kolejne wyniki pomiarów (próbki sygnału) uzyskuje się w chwilach zależnych od aktualnego okresu fali ultradźwiękowej [2], a więc ze stosunkowo dużą nierównomiernością. Podobnie nierównomiernie rozmieszczone są wartości chwilowej prędkości obrotowej maszyny wirującej wyznaczane za pomocą przetwornika obrotowo-impulsowego [9]. W takich przypadkach każda próbka sygnału $x(n)$ musi być jednoznacznie skojarzona z chwilą czasową $t(n)$ w której została pobrana. Wynika stąd, że do jednoznacznego określenia sygnału spróbkowanego nierównomiernie należy zastosować opis za pomocą ciągu par liczb $\{x(n), t(n)\}$. W przypadku, gdy chwile próbkowania $t(n)$ są powiązane znaną zależnością funkcyjną z wartością sygnału $x(t)$, do jednoznacznego opisu sygnału wystarczający jest ciąg jednych z tych wartości, jak np. w sygnale przetwornika obrotowo – impulsowego, dla którego odcinki czasu pomiędzy kolejnymi jego impulsami jednoznacznie określają zarówno wartości prędkości obrotowej, jak i chwile ich pomiaru.

3. ALGORYTM RESAMPLINGU

Resampling umożliwia uzyskanie ciągu próbek sygnału rozmieszczonych równomiernie w czasie z sygnału spróbkowanego nierównomiernie. Polega on na odtworzeniu sygnału pomiędzy jego znanymi wartościami $x(n)$ rozmieszczonymi nierównomiernie w czasie w chwilach $t(n)$ i następnie pobraniu z niego próbek $x_R(m)$ rozmieszczonych równomiernie ze stałym okresem T_R^* . Skupiono się na algorytmie resamplingu dla sygnałów częstotliwościowych [4], [7], [8], [9], [10], [11], dla których chwilowa wartość $x(n)$ przetwarzanej w systemie wielkości mierzonej jest proporcjonalna do chwilowej wartości częstotliwości sygnału $F(n)$, wyznaczanej na podstawie pomiaru okresu sygnału $T(n)$, który dla uniknięcia pewnych nieścisłości formalnych będzie nazywany w dalszej części „czasem międzyimpulsowym” :

$$x(n) = c_p \cdot F(n) = c_p \cdot \frac{1}{T(n)} \quad . \quad (3)$$

Kolejne wartości $x(n)$ uzyskujemy z pomiarów po zakończeniu kolejnego czasu międzyimpulsowego $T(n)$ w chwilach $t(n)$:

$$t(n) = t_0 + \sum_{i=0}^n T(i) \quad . \quad (4)$$

Stała c_p w zależności (3) jest parametrem przetwornika przetwarzającego przetwarzaną w systemie wielkość fizyczną x w częstotliwość F . Przykładowo, przy pomiarach prędkości obrotowej za pomocą przetwornika obrotowo–impulsowego generującego k impulsów na jeden pełny obrót wału, stała c_p jest równa:

$$c_p = \frac{2\pi}{k} . \quad (5)$$

W rozpatrywanym przypadku kolejne wyniki pomiarów $x(n)$ uzyskiwane są w odstępach czasu równym kolejnym czasem międzyimpulsowym $T(n)$ w chwilach $t(n)$ określonych wzorem (3). W celu zminimalizowania błędów dynamicznych związanych z uśrednianiem podczas pomiaru częstotliwości F , na podstawie wyników prac [4], [7], [11], wartości $x(n)$ należy przypisać chwilom czasowym $t^*(n)$ leżącym w połowie czasu międzyimpulsowego $T(n)$:

$$t^*(n) = \frac{t(n-1) + t(n)}{2} = t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + \frac{1}{2}T(n) . \quad (6)$$

Po resamplingu otrzymane próbki $x_R(m)$ rozmieszczone są równomiernie w czasie i przypisane chwilom czasowym $t_R^*(m)$ równoodległym o okres próbkowania T_R :

$$t_R^*(m) = t_0 + (m-1)T_R . \quad (7)$$

Wartości próbek $x_R(m)$ dla chwil czasowych $t_R^*(m)$ mogą być ustalane na kilka różnych sposobów [3]. Najprostszym jest metoda S&H (*Sample & Hold*), w której próbce $x_R(m)$ przypisuje się wartość próbki $x(n)$ bezpośrednio ją poprzedzającej. Nieco lepsze rezultaty daje metoda NNR (*Nearest Neighbor Resampling*), w której próbce $x_R(m)$ przypisuje się wartość próbki $x(n)$ leżącej najbliżej niej, tzn. bezpośrednio przed lub za nią. Lepsze rezultaty zapewnia zastosowanie interpolacji liniowej do wyznaczenia próbki $x_R(m)$ na podstawie wartości dwóch próbek $x(n-1)$ i $x(n)$ leżących najbliżej niej, według zależności (8).

$$x_R(m) = x(n-1) + \frac{x(n) - x(n-1)}{t^*(n) - t^*(n-1)} \cdot (t_R^*(m) - t^*(n-1)), \quad t^*(n-1) \leq t_R^*(m) \leq t^*(n) \quad (8)$$

Możliwe jest również zastosowanie interpolacji wielomianem stopnia drugiego lub wyższego, na podstawie wartości trzech lub większej liczby próbek, ale zazwyczaj

uzyskane rezultaty nie są znacząco lepsze, przy jednoczesnej znacznej komplikacji procedur obliczeniowych [3], [12].

4. BADANIA SYMULACYJNE

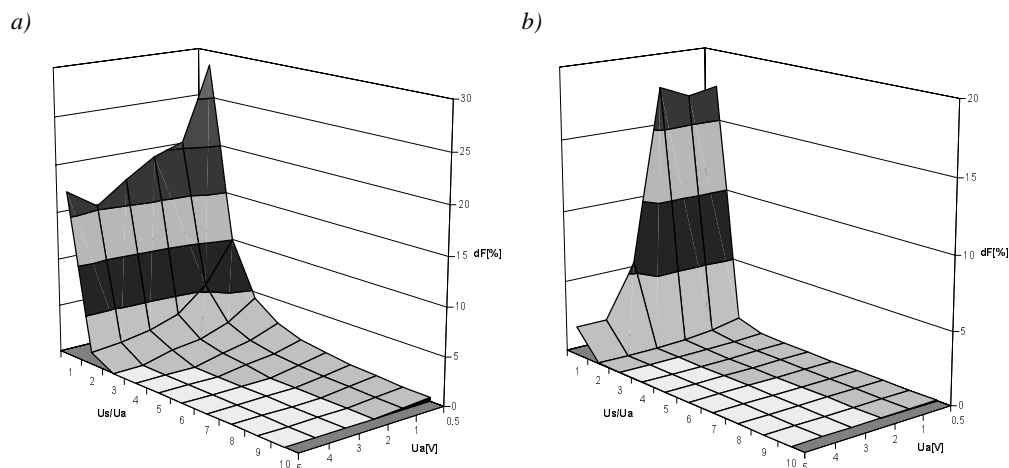
Dla oceny przedstawionego algorytmu przeprowadzono badania symulacyjne na przykładzie przetwarzania sygnału wyjściowego przetwornika napięcie – częstotliwość VFC. Za pomocą przygotowanych programów symulowano działanie przetwornika sterowanego sygnałem napięciowym zawierającym składową stałą oraz sinusoidalną składową przemienną i generującego odpowiadający mu sygnał częstotliwościowy [8]. Przyjęto parametry symulowanego przetwornika zbliżone do rzeczywistych przetworników VFC: zakres napięć od 0 do 10V oraz stałą przetwarzania 1kHz/V. Symulacje przeprowadzono dla sygnału wejściowego o stałej częstotliwości 100 Hz i amplitudzie składowej przemienną od 0.5V do 5V oraz stosunku składowej stałej Φ przemienną U_s/U_a od równego 1 do 10. Dla każdego z symulowanych sygnałów wejściowych przetworzono sygnał wyjściowy przeprowadzając resampling metodą S&H oraz z aproksymacją liniową i wielomianem drugiego stopnia. W celu oceny skuteczności i jakości rozpatrywanego algorytmu, z otrzymanego w wyniku resamplingu sygnału wyznaczano transformatę FFT wg algorytmu Cooley'a – Tukey'a i otrzymane widmo porównywano ze znanym widmem pierwotnego sygnału napięciowego. Dla ilościowego porównania poszczególnych przypadków obliczano względny błąd średniokwadratowy δF widma odtworzonego po resmplingu sygnału według zależności (9):

$$\delta F = \frac{\sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (F_{ai} - F_{wi})^2}}{F_{w0}}, \quad (9)$$

gdzie F_{w0} - wartość transformaty Fouriera przebiegu pierwotnego dla składowej stałej, F_{wi} - wartość transformaty dla i-tej harmoniczej przebiegu pierwotnego, F_{ai} - wartość transformaty dla i-tej harmoniczej przebiegu aproksymowanego, i-numer harmoniczej, N-liczba wszystkich harmoniczych obliczonego widma.

Na rys. 1a, b pokazano wykresy przedstawiające uzyskane rezultaty dla resamplingu metodą S&H oraz z aproksymacją liniową (8). Aproksymacja wielomianem dała wyniki niewiele różniące się od aproksymacji linią prostą [8] i dlatego odpowiedniego wykresu nie zamieszczono. Uzyskane wykresy pozwalają stwierdzić, że im większy jest stosunek składowej stałej do przemienną U_s/U_a tym lepsza jest jakość przeprowadzonego resamplingu i większa dokładność wyznaczania transformaty Fouriera. Błędy δF dla

aproxymacji linią prostą i wielomianem już dla stosunku $U_s/U_a \geq 2$ są mniejsze od 1% i bardzo szybko maleją, osiągając tysięczne części procenta dla stosunku równego 10. Znacząco gorsze rezultaty zapewnia resampling metodą S&H.

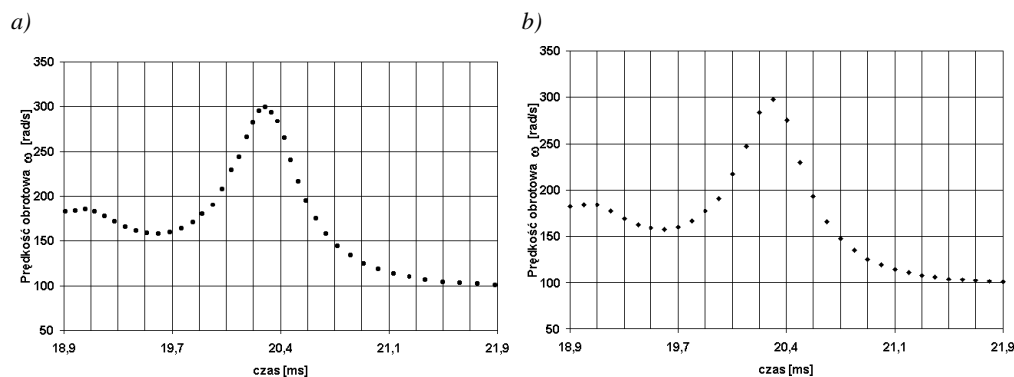


Rys. 1. Błąd widma dla resamplingu S&H (a) oraz z interpolacją linią prostą (b)
Fig. 1. Error of spectrum for S&H resampling (a) and with linear interpolation (b)

5. POMIARY W UKŁADZIE RZECZYWISTYM

W celu sprawdzenia praktycznej przydatności rozpatrywanego algorytmu resamplingu przeprowadzono również pomiary w układzie rzeczywistym. Tym razem wykorzystano stanowisko pomiarowe składające się z silnika repulsyjnego małej mocy sprzęgniętego z przetwornikiem obrotowo-impulsowym i komputerem PC wyposażonym w kartę pomiarową CTM-PER firmy KEITHLEY. Zastosowano silnik charakteryzujący stosunkowo dużą nierównomiernością obrotów. Karta CTM-PER zawierająca 28 bitowy licznik zliczający wzorcowy sygnał zegarowy 10MHz, współpracujący z pamięcią FIFO zapewniającą bezkolizyjny odczyt licznika “w locie” oraz transfer wyników do pamięci komputera, umożliwia pomiar czasu międzyimpulsowego zakresie od 0.1 ms do 26.8 s i zgromadzenie w pamięci komputera zadanej liczby wyników pomiarów. Na potrzeby przeprowadzonych badań rejestrowano rekordy danych zawierające każdorazowo 512 wyników pomiarów czasu międzyimpulsowego, odpowiadające jednemu obrotowi wału silnika. Zgromadzone w pamięci komputera kolejne wartości czasu międzyimpulsowego, po przeliczeniu na wartości chwilowe prędkości obrotowej [4], reprezentują sygnał spróbkowany nierównomiernie [7], [8]: kolejne jego wartości są od siebie odległe o czas zależny od chwilowej prędkości obrotowej - przy prędkościach większych próbkki sygnału

rozmieszczone są bliżej siebie, i odwrotnie. Na rys.2a przedstawiono fragment 41 próbek przykładowego przebiegu sygnału uzyskanego z pomiarów. Po przeprowadzeniu resamplingu uzyskano próbki sygnału rozmieszczone równomiernie, przedstawione na rys.2b. Parametry algorytmu dobrano tak, aby uzyskać taką samą liczbę 512 próbek sygnału przed i po resamplingu.



Rys. 2. Sygnał spróbkowany nierównomiernie (a) i sygnał po resamplingu (b)
 Fig. 2. Nonuniformly sampled signal (a) and resampled signal (b)

6. PODSUMOWANIE

Przedstawiony algorytm resamplingu umożliwia uzyskanie z sygnału spróbkowanego nierównomiernie ciągu próbek równomiernie rozmieszczonych w czasie. Jakość resamplingu zależy od przyjętego sposobu aproksymacji sygnału oraz od nierównomierności rozmieszczenia próbek, którą można wyrazić stosunkiem różnicy maksymalnego i minimalnego odstępów czasu pomiędzy próbkami do jego wartości średniej. W badaniach symulacyjnych przeprowadzonych na przykładzie przetwornika napięcie - częstotliwość pokazano, że zastosowanie aproksymacji liniowej znacząco zmniejsza błędy przetwarzania w stosunku do prostszej metody S&H. Zastosowanie wielomianu nie daje znaczącego polepszenia jakości przetwarzania. Przeprowadzone eksperymenty w układzie rzeczywistym z przetwarzaniem sygnału przetwornika obrotowo-impulsowego potwierdziły w praktyce skuteczność prezentowanych algorytmów. Mogą one znaleźć zastosowanie w przetwarzaniu sygnałów uzyskiwanych z przetworników napięcie - częstotliwość, generatorów sterowanych napięciowo, czujników z wyjściem częstotliwościowym (np. pojemnościowych, kwarcowych, z falą powierzchniową) i w innych przypadkach, w których zmienna w czasie częstotliwość sygnału reprezentuje w systemie pomiarowym zmienną w czasie wielkość mierzoną.

LITERATURA

- [1] ANTONIOU A., Digital filters, McGraw–Hill, 1993.
- [2] BROERSEN M.T., WAELE S., Reliable LDA-spectra by resampling and ARMA-modeling, IEEE Transactions Instrumentation and Measurement, 1999, 48, 6, 1117 – 1121.
- [3] BROERSEN M.T., WAELE S., Error measures for resampled irregular data, IEEE Transactions Instrumentation and Measurement, 2000, 49, 2, 216 – 221.
- [4] JASIK J.R., PAWŁOWSKI E., Pomiary częstotliwości chwilowej sygnałów impulsowych, Pomiary Automatyka Kontrola 1998, 2, 38 – 41.
- [5] JENQ Y. C., Perfect reconstruction of digital spectrum from nonuniformly sampled signals, IEEE Transactions Instrumentation and Measurement, 1997, 46, 3, 649 – 652.
- [6] OPPENHEIM A., SCHAFER R., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, WKŁ, 1979.
- [7] PAWŁOWSKI E., Analiza widmowa sygnałów pomiarowych w układach czujników z wyjściem częstotliwościowym, Czujniki Optoelektroniczne i Elektroniczne COE 2000, Gliwice – czerwiec 2000, 427 – 432.
- [8] PAWŁOWSKI E., Analiza widmowa w systemach pomiarowych z częstotliwościowym nośnikiem informacji, Krajowy Kongres Metrologii KKM 2001, Warszawa 24–26.06 2000, 883 – 886.
- [9] ŚWISULSKI D., PAWŁOWSKI E., PORZEZIŃSKI P., Metoda zliczania zależnego w pomiarach i rejestracji prędkości obrotowej, Elektronizacja 1999, 11, 12, 14 – 17, 5 – 7.
- [10] ŚWISULSKI D., Przetwarzanie sygnału impulsowego z konwersją okresu próbkowania, Krajowy Kongres Metrologii KKM'98, Gdańsk 1998, 190 – 197.
- [11] ŚWISULSKI D., Błąd dynamiczny w torze pomiarowym z częstotliwościowym nośnikiem informacji, Pomiary Automatyka Kontrola 2000, 2, 2 – 6.
- [12] ROLAIN Y., SCHOUKENS J., VANDERSTEN G., Signal reconstruction for non-equidistant finite length sample sets: A “KIS” Approach, IEEE Transactions Instrumentation and Measurement, 1998, 47, 5, 1046 – 1052.
- [13] VERSPECHT J., Accurate spectral estimation based on measurement with a distorted – timebase digitizer, IEEE Transactions Instrumentation and Measurement, 1994, 43, 2, 210 – 215.

DIGITAL PROCESSING OF NONUNIFORMLY SAMPLED SIGNALS

The paper concerns the problem of the reconstruction of uniformly spaced time samples of the signal from its nonuniformly spaced samples. The problem appears when the fluctuating values of a measured quantity are converted to a frequency signal, and its period instead of the frequency is measured. With resampling algorithm, a regularly sampled signal is derived from observations that are irregularly spaced. The presented processing algorithm can be employed in all the cases when frequency of a signal carries information about instantaneous values of a physical quantity processed in the system. The following tests commonly applied in practice make good examples of such situations: testing of angular motion in rotating machines with the application of an incremental encoder, testing of converters with frequency outputs in dynamic states including operation tests on oscillators controlled by voltage (VCO), stability testing of generators or frequency in power grids etc.

Key words: digital signal processing, irregular sampling, resampling, signal reconstruction.