RACHUNEK NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

Prezentacja dla studentów studiów doktoranckich

Dr inż. Eligiusz PAWŁOWSKI
Politechnika Lubelska
Wydział Elektrotechniki i Informatyki

Prawo autorskie

Tematyka wykładu

Przypomnienie o pomiarach: co, jak i dlaczego mierzymy ?

Obiekt pomiaru, wielkość, wartość, wynik pomiaru

Błąd pomiaru, klasa przyrządu pomiarowego, błąd graniczny

Błędy przypadkowe, rozkłady prawdopodobieństwa błędów

Niepewności pomiarów w pomiarach bezpośrednich

Zaokrąglanie i zapisywanie niepewności i wyników pomiarów

Niepewności pomiarów w pomiarach pośrednich

Literatura

1. P.H.Sydenham (redakcja) - Podręcznik metrologii cz. I i II, WKiŁ, W-wa 1988r., 1990.
2. Ajdukiewicz K. Logika pragmatyczna, PWN, Warszawa 1975.
3. Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane, Przewodnik PKN-ISO/IEC Guide 99, PKN, Warszawa 2010.
4. Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii, GUM, Warszawa 1996.
5. PN-71/N-02050. Metrologia. Nazwy i określenia
6. **Wyrażanie niepewności pomiaru.** Przewodnik, GUM, Warszawa 1999

Literatura c.d.

7.**Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement**, Technical Note 1297, NIST, 1994 Edition (http://www.nist.gov/)

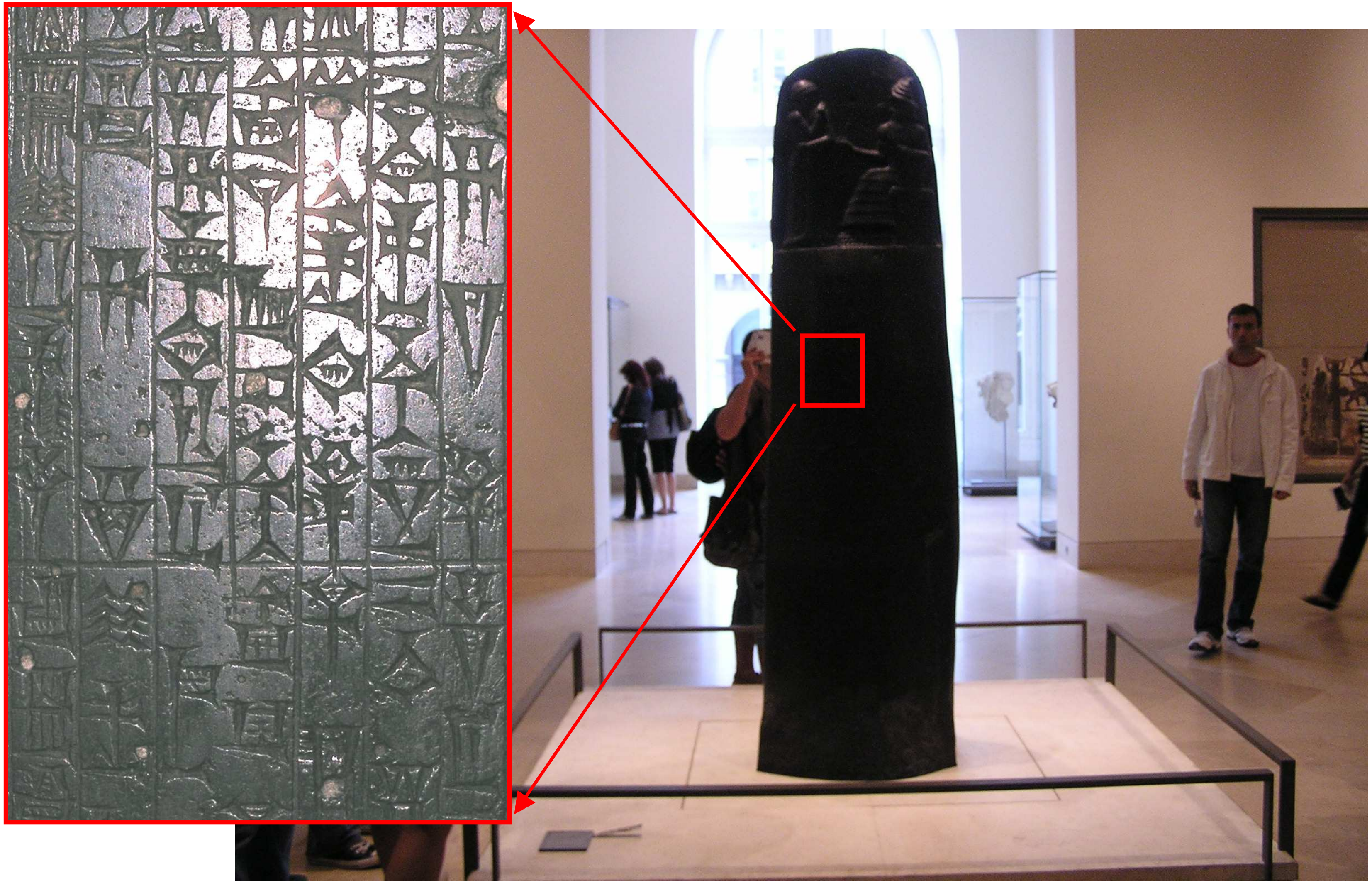
8.ISO 3534-1:1993 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms

9.Kuśmiderska B., Meldizon J., Podstawy rachunku błędów w pracowni fizycznej, Wyd. Politechniki Lubelskiej, Lublin 1990

10.Respondowski R., Opracowanie wyników pomiarów fizycznych, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999

11.Plik pomocy programu Microsoft Excel – funkcje statystyczne

Kodeks Hammurabiego, XVIII wiek p.n.e.



Kodeks Hammurabiego, króla Babilonu (1792-1750 p.n.e), w zbiorach Luwru

Prawie 4 tys. lat temu !!!

Kodeks Hammurabiego, XVIII wiek p.n.e.

§P. Jeśli kupiec zboże lub srebro na pożyczkę oprocentowaną dał i kiedy na pożyczkę je oddawał, srebro według odważnika małego lub zboże według **miary małej** dał, gdy podczas odbierania srebro według odważnika dużego, zboże według **miary dużej** odebrał, kupiec ten **wszystko co przyjął utraci.**

§108. Jeśli oberżystka jako zapłatę za piwo zboża nie przyjęła, lecz według **odważnika zbyt dużego** srebro przyjęła, bądź równowartość piwa względem wartości srebra obniżyła i oberżystce tej udowodni się to, **do wody wrzuci się ją** *(w znaczeniu: utopi się ją).*

Biblia, ok. XIII wiek p.n.e.

Ponad 3 tys. lat temu !!!

Księga Kapłańska,

Rozdział 19,

Świętość życia codziennego

Sprawiedliwość społeczna:

35 Nie będziecie popełniać niesprawiedliwości w wyrokach, **w miarach, w wagach, w objętości.**

36 Będziecie mieć wagi sprawiedliwe, **odważniki** sprawiedliwe, sprawiedliwą efę, sprawiedliwy hin.

Efa = 6 hin = 0,03888m^3 – hebrajskie miary objętości

Starożytne Wzorce Miar

Grecki wzorzec masy wykonany z brązu, ok. 5 wiek p.n.e.

Bronze weight inscribed ΔΙΟΣ ("of Zeus") from Olympia, 5th c. BCE

Museum of the History of the Olympic Games in Antiquity, Olympia, Greece

Gdańskie Wzorce Miar

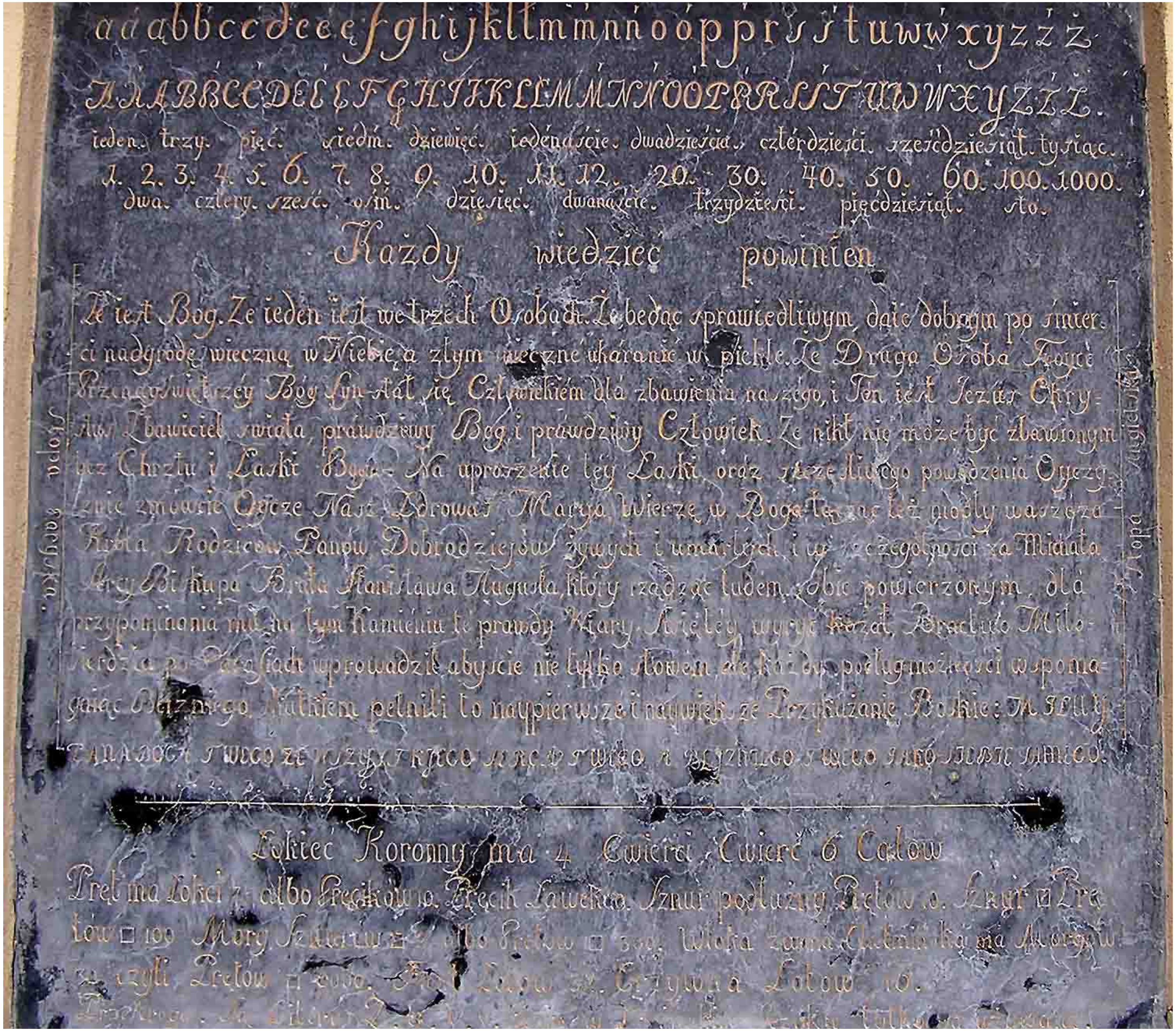
Kieleckie Wzorce Miar

Marmurowa tablica z ok. 1791 r.
„Każdy wiedzieć powinien”

Katedra w Kielcach,
Plac NMP 3

Łokieć Koronny ma 4 Cwierci, Cwierć 6 Calów

Pręt ma Łokci 7 ½ , albo Pręcików 10, Pręcik Ławek 10. Sznur podłużny Prętów 10. Sznur ☐ Prętów ☐ 100 Morg Sznurów ☐ 3 albo Prętów ☐ 300. Włoka zwana Chełminską ma Morgów 30 czyli Prętów ☐ 9000 ...

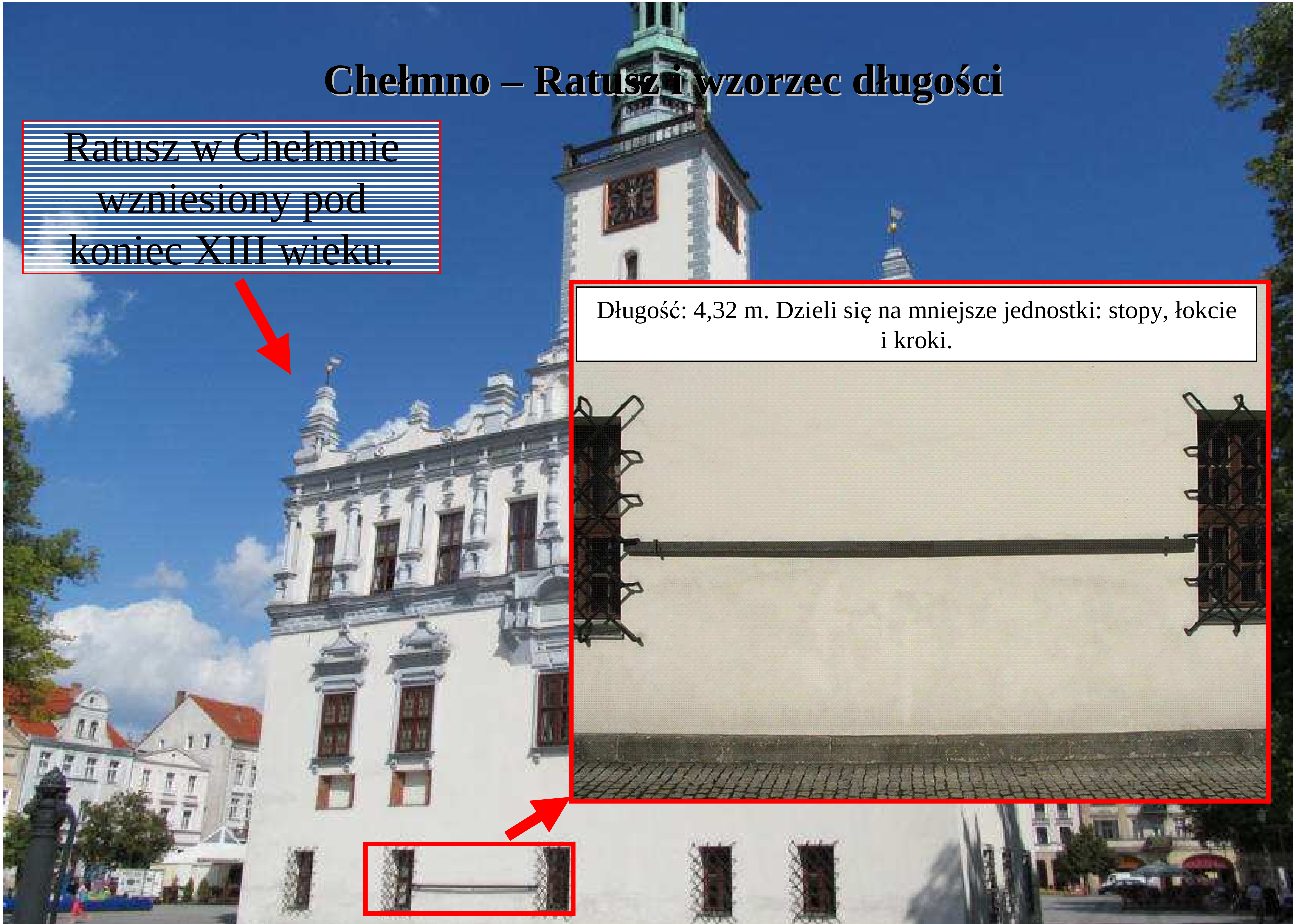


a a ą b b c c d e e ę f g h i j k l ł m m n n o o p p r s s t u w w x y z ż ż
A A Ą B B C C D E E Ę F G H I J K L Ł M M N N O O P P R S S T U W W X Y Z Ż Ż.
ieden. trzy. pięć. siedm. dziewięć. iedenaście. dwadzieścia. czterdzieści. sześćdziesiąt. tysiąc.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 20. 30. 40. 50. 60. 100. 1000.
dwa. cztery. sześć. ośm. dziesięć. dwanaście. trzydzieści. pięćdziesiąt. sto.
Każdy wiedzieć powinien
Że iest Bóg. Że ieden iest we trzech Osobach. Że będąc sprawiedliwym, daie dobrym po śmierci nadgrodę wieczną w Niebie, a złym wieczne ukaranie w piekle. Że Druga Osoba Troyce Przenayświętszey Bóg Syn stał się Człowiekiem dla zbawienia naszego, i Ten iest Jezus Chrystus Zbawiciel świata, prawdziwy Bóg i prawdziwy Człowiek. Że nikt nie może być zbawionym bez Chrztu i Łaski Boga.
Łokieć Koronny ma 4 Ćwierci Ćwierć 6 Calów
Stopa
Stopa

Chełmno – Ratusz i wzorzec długości

Ratusz w Chełmnie wzniesiony pod koniec XIII wieku.

Długość: 4,32 m. Dzieli się na mniejsze jednostki: stopy, łokcie i kroki.



Pręt chełmiński - średniowieczny wzorzec miary. Umiejscowiony za zachodniej ścianie Ratusza.

Metrologia – nauka o pomiarach

μετρον *(metron)* – miara

λογοσ *(logos)* – słowo, wykład, nauka

Metrologia jest to gałąź wiedzy i działalności człowieka obejmującą wszystko, co jest związane z **pomiarami**. Metrologia jest nauką o mierzeniu.

Metrologia – dlaczego mierzymy ?

Galileo Galilei (Galileusz)

1564-1642

„Policz to, co można policzyć,
zmierz to, co można zmierzyć,
a to co jest niemierzalne,
uczyń mierzalnym".

Wnioski:

- liczenie jest bardzo blisko związane z pomiarami
- nie wszystko można zmierzyć (przy danym stanie nauki)
- to co jest niemierzalne można uczynić mierzalnym

Pytania:

- co można zmierzyć, a czego nie można zmierzyć?
- w jaki sposób uczynić mierzalnym to, co jest niemierzalne?
- czy wszystko można uczynić mierzalnym?

Do czego to się może przydać ?

Metrologia – dlaczego mierzymy ?

William Thomson,
Lord Kelvin
1824-1907

„Często powiadam,
że kiedy możesz zmierzyć to, o czym mówisz
i kiedy możesz wyrazić to liczbami,
to już wiesz cokolwiek o tym,
ale jeżeli nie możesz zmierzyć tego,
jeżeli nie możesz tego wyrazić liczbami,
to twoja wiedza jest uboga i niewystarczająca ...”.

Wnioski:

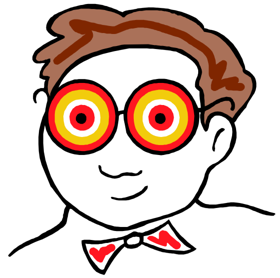
- mierzenie polega na wyrażaniu liczbami rzeczywistości
- opis za pomocą liczb jest podstawą wiedzy
- bez opisu liczbowego wiedza jest uboga

Pytania:

- w jaki sposób przypisywać liczby rzeczywisty obiektom?

Proces poznawania otaczającej nas rzeczywistości

Spostrzeganie – najbardziej elementarny akt poznawania rzeczywistości, w dużej mierze spostrzeganie jest przypadkowe, ale pozwala wyciągać wnioski i uogólniać.

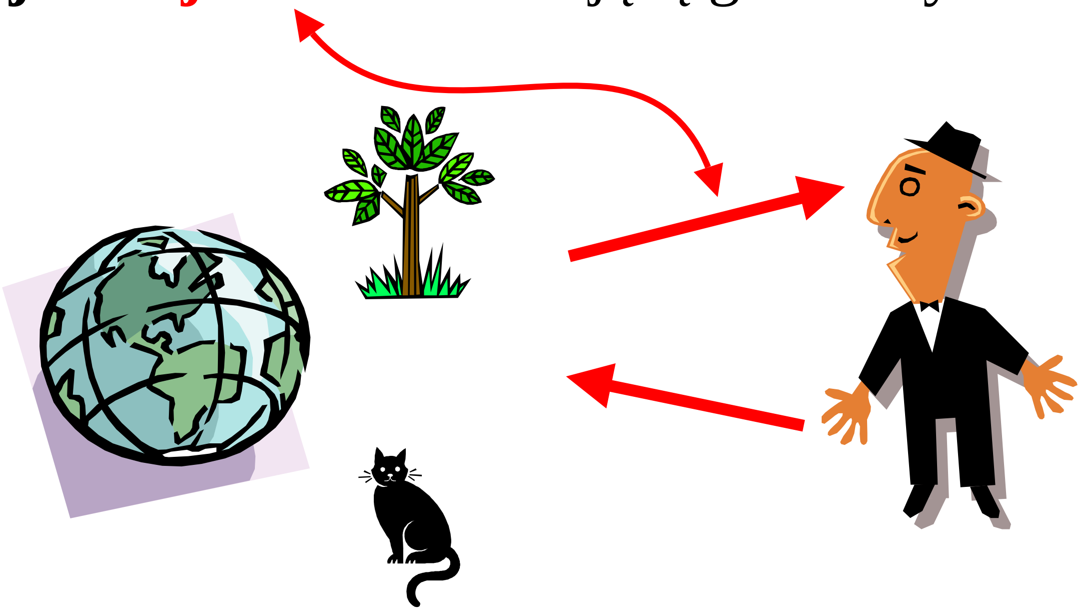


Obserwacja – spostrzeganie kierowane zadaniem, czyli spostrzeganie zaplanowane, prowadzone celowo dla uzyskania odpowiedzi na postawione z góry pytania, bez oddziaływania na obiekt obserwacji.

Eksperyment – zabieg realizowany w celu dokonania obserwacji, który bądź to wywołuje, bądź to wpływa na obserwowane zjawisko.

Eksperyment – wzajemne oddziaływanie

Eksperyment jest najbardziej zaawansowanym sposobem poznawania rzeczywistości, w eksperymencie człowiek **oddziałuje wzajemnie** z otaczającą go rzeczywistością.



Eksperyment – uzyskiwanie informacji

Eksperyment jest to celowe działanie prowadzące do uzyskania informacji o obiektach i zjawiskach.

Informacja ta może mieć charakter:

- jakościowy (odpowiada na pytania typu: jakie coś jest ?)

Np.: duże, małe, okrągłe, kwadratowe, zielone, czerwone, brzydkie, ładne, słodkie, kwaśne, ciekawe, nudne ...

- ilościowy (odpowiada na pytanie: ile czegoś jest ?)

Np.: 2 kilogramy, 3 metry, 10 omów, 40μT, 1 mol ($6{,}02214179 \cdot 10^{23}$) cząsteczek tlenu, 12 jabłek ...

Pomiar – definicje pomocnicze

Cecha – pojęcie pierwotne, nie definiowane (właściwość, coś co opisuje pewne własności obiektu).

Obiekt pomiaru – zbiór cech rozróżnialnych jakościowo.

Wielkość (fizyczna, mierzona) **–** cecha (właściwość) obiektu (zjawiska, ciała lub substancji) którą można wyróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo za pomocą liczby i odniesienia.

Wartość (wielkości) **–** ilościowe wyrażenie wielkości poprzez podanie liczby i jednostki miary.

Wielkość (fizyczna) i jej wartość

Uwaga! Nie wolno mylić pojęć **Wielkość i Wartość**

Wielkość (fizyczna, mierzona) – cecha obiektu (ciała, substancji, zjawiska) którą można wyróżnić jakościowo i określić ilościowo.

Wartość (wielkości) – ilościowe wyrażenie wielkości poprzez podanie liczby i jednostki miary.

Bez sensu !!!

Wartość wielkości $\neq$ ~~**Wielkość wartości**~~

Pomiar – definicje

Ajdukiewicz K., Logika pragmatyczna:

Pomiar właściwy danej wielkości jest to **zabieg poznawczy**, którego wynikiem jest znalezienie **miary liczbowej** tej wielkości w obranych jednostkach mierniczych.

Pomiar - definicje

Finkelstein L., Podręcznik Metrologii:

Pomiar jest **procesem empirycznym** *(doświadczalnym)* obiektywnego **przyporządkowania liczb** właściwościom obiektów i zdarzeń świata realnego w sposób umożliwiający jego opisanie.

Pomiar - definicje

Chwaleba A., Metrologia elektryczna:

Pomiar jest to **proces poznawczy**, który umożliwia odwzorowanie właściwości fizycznych obiektów w dziedzinie **liczb**.

Z punktu widzenia operacyjnego **pomiar** jest to ciąg czynności, które wykonuje się w celu wyznaczenia **wartości wielkości** fizycznej danego obiektu.

Pomiar - definicje

PKN-ISO/IEC, Międzynarodowy słownik metrologii:

Wcześniej (1996r.):

Pomiar jest to **zbiór operacji** mający na celu wyznaczenie wartości wielkości.

Obecnie (2010r.):

Pomiar jest to proces **doświadczalnego** wyznaczenia jednej lub więcej **wartości wielkości**, które w zasadny sposób mogą być przyporządkowane wielkości.

Pomiar - definicje

Piotrowski J, Podstawy miernictwa:

Pomiarem nazywamy czynności, po których wykonaniu możemy stwierdzić, że w **chwili** pomiaru dokonanego w określonych **warunkach**, przy zastosowaniu określonych **środków** i wykonaniu odpowiednich **czynność** wielkość mierzona *x* miała wartość

$$a \leq x \leq b$$

Stwierdzenie, że wielkość *x* jest nie mniejsza niż *a* i równocześnie nie większa niż *b*, nazywamy wynikiem pomiaru

Wnioski:

-wynik pomiaru jest niedokładny,

-wynik pomiaru jest przedziałem, a nie pojedynczą liczbą ,

-wynik pomiaru zależy od chwili jego wykonania, warunków otoczenia, użytych środków, wykonanych czynności, przy powtarzaniu pomiarów uzyskujemy różne wyniki.

Pomiar - podsumowanie

1. **Nie ma** jednoznacznej definicji pomiaru.
2. Pomiar jest **eksperymentem**, zawsze wymaga wykonania pewnych czynności.
3. Po przeprowadzeniu pomiaru otrzymujemy jakąś **liczbę**, która opisuje **ilościowo** stan jakiejś cechy obiektu.
4. Wynik pomiaru zawiera zawsze **liczbę** i **jednostkę miary**.
5. Wynik pomiaru jest **niedokładny** i **niepowtarzalny**.
6. Z wynikiem pomiaru związana jest więc pewna jego **niepewność.**

Wynik pomiaru

Wynik pomiaru = **Liczba** * **jednostka miary**

Przykład:

U = **230** **V**

Wnioski

- **Wynik pomiaru** odpowiada na pytanie: **ile** czegoś jest ?
- Do wykonania pomiaru niezbędna jest **jednostka miary**

Wynik pomiaru - definicja

PKN-ISO/IEC, Międzynarodowy słownik metrologii

Wcześniej (1996r.):

Wartość przypisana **wielkości mierzonej,** uzyskana drogą pomiaru.

Obecnie (2010r.):

Zbiór wartości wielkości przyporządkowany **menzurandowi** wraz z każdą dostępną informacją mogącą mieć znaczenie.

Wniosek

- Rozszerzono pojęcie wyniku pomiaru na **zbiór** wartości wielkości,
- Rozszerzono pojęcie wielkości mierzonej na **menzurand.**

Menzurand - definicja

PKN-ISO/IEC, Międzynarodowy słownik metrologii

Wcześniej (1996r.):

Wielkość określona, stanowiąca przedmiot pomiaru.

Obecnie (2010r.):

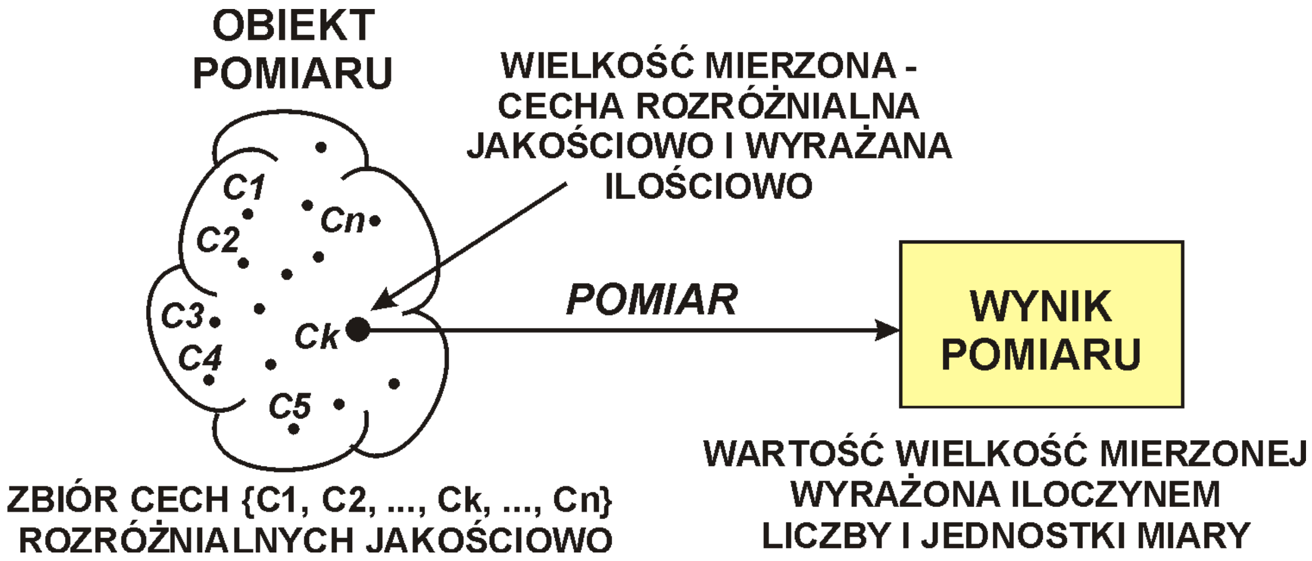
Wielkość, która ma być zmierzona.

Uwaga.

W języku polskim w słowniku PKN (2010r.) wprowadzono termin **menzurand** od łacińskiego słowa *mensurandum* (oznaczające „to, co ma nastąpić”), podobnie jak *oprerandum*-operand, *kwantum*-kwant, *postulantum*-postulat. Wcześniej w języku polskim stosowano zapis **mezurand** (np. w słowniku z 1996r.) W języku angielskim stosuje się zapis ***measurand.***

Koniec wykładu 1

Pomiar - podsumowanie



O dokładności i błędach pomiarów – mową potoczną

Wykonując pomiary chcielibyśmy uzyskać ich wysoką **dokładność**. Jednak, zawsze wartość **zmierzona** różni się od wartości **prawdziwej**, gdyż występują **błędy** pomiaru, a więc wyniki pomiarów charakteryzuje pewna **niedokładność**. Po za tym, wyniki kolejnych pomiarów tej samej wielkości różnią się między sobą, a więc również występuje jakaś **niepewność** wyniku. Ważne jest również, aby przyrząd pomiarowy charakteryzowała **precyzja**, wysoka **czułość** i dobra **rozdzielczość**.

Wszystkie te pojęcia są stosowane w mowie potocznej, ale często nie są jednoznacznie rozróżniane, a nawet bywają **mylone** lub stosowane **zamiennie**. W metrologii zaś są one **jednoznacznie** zdefiniowane.

Dokładność, niedokładność, błąd, niepewność ...

Ogólnie rzecz biorąc, wyniki pomiarów i przyrządy pomiarowe możemy opisywać za pomocą pojęć:

- **jakościowych** (dokładność, niedokładność, precyzja) i
- **ilościowych** (błąd, niepewność).

Pojęć jakościowych **nie można wyrazić liczbowo**, można więc tylko ocenić, że jeden przyrząd jest dokładniejszy od drugiego, ale nie można dokładności podać w postaci liczby.

Pojęcia ilościowe **można wyrazić liczbowo**, można więc obliczyć, że niepewność jednego pomiaru wynosi np.: 2mV, a drugiego 5mV, a więc pomiar pierwszy jest dokładniejszy od drugiego.

Wartość wielkości – dodatkowe definicje

Wartość wielkości zmierzona

Wartość wielkości prawdziwa

Wartość wielkości umowna

Podstawowe źródło:

Międzynarodowy słownik metrologii. Pojęcia podstawowe i ogólne oraz terminy z nimi związane, Przewodnik PKN-ISO/IEC Guide 99, PKN, Warszawa 2010.

Wartość wielkości zmierzona

Wartość wielkości zmierzona (wartość zmierzona) – wartość wielkości wyrażająca wynik pomiaru, wartość uzyskana z pomiaru.

Uwagi

-Wartość **zmierzona** wraz z **dodatkowymi** uzupełniającymi informacjami dotyczącymi np.: błędów, niepewności, warunków wykonania pomiaru stanowią łącznie **wynik pomiaru**.

-Pojęcia **wynik pomiaru** i **wartość zmierzona** w zasadzie **nie są sobie tożsame**.

-Wartości zmierzone tej samej wielkości uzyskane w kolejnych pomiarach zazwyczaj nie są takie same, ze względu na występujące **błędy przypadkowe**, których skutkiem jest **niepewność pomiaru**.

-Powtarzając wielokrotnie pomiar otrzymamy pewien **zbiór wartości** zmierzonych, rozrzuconych wokół **wartości średniej**, która zazwyczaj jest najbliższa **wartości prawdziwej**.

Przyjęte oznaczenie na wartość zmierzoną $\boxed{\hat{x}}$

„Daszek" symbolizuje rozrzut wartości w pewnym przedziale

Wartość wielkości prawdziwa

Wartość wielkości prawdziwa (wartość prawdziwa, rzeczywista) – wartość wielkości logicznie zgodna z definicją wielkości.

Uwagi

-Wartość prawdziwą uzyskalibyśmy jako **wynik bezbłędnego pomiaru**.

-Wartości prawdziwe są ze swej natury **nieznane !!!**

-Wartość prawdziwa jest pojęciem **idealnym**, **hipotetycznym**, niektórzy autorzy są zdania, że **nieistniejącym** lub mającym **wiele wartości**.

-Pojęcie wartości prawdziwej jest **przydatne** w analizie **błędów** i **niepewności** pomiarowych.

Przyjęte oznaczenie na wartość prawdziwą $\dot{X}$

„Kropka” symbolizuje jedną dokładną konkretną wartość (punkt na osi liczbowej)

Wartość wielkości umowna

Wartość wielkości umowna (wartość umowna, poprawna, umownie prawdziwa) – wartość wielkości przypisana drogą umowy w określonym celu.

Uwagi

-Wartość umowna (poprawna) jest to taka wartość **zbliżona do wartości prawdziwej**, że różnica pomiędzy nimi jest pomijalnie mała w danym zastosowaniu.

-Wartość umowna (poprawna) może być uzyskana poprzez pomiar wykonany z niepewnością na tyle małą, że może być w danym zastosowaniu akceptowana jako pomijalna.

-Wartość umowna (poprawna) może być wykorzystana do praktycznego wyznaczania błędów, zastępując w obliczeniach wartość prawdziwą.

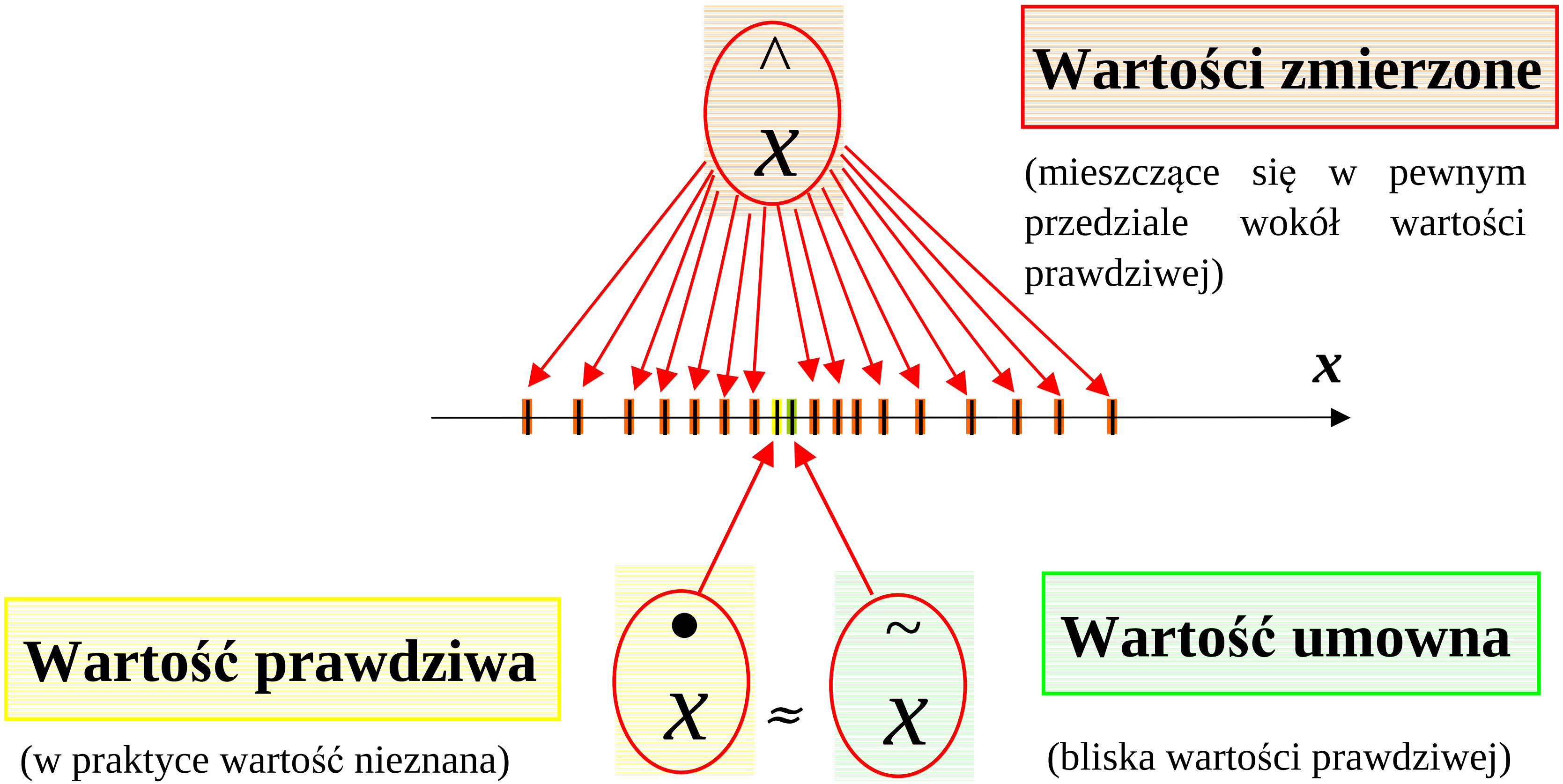
-Przykład: wartość umowna normalnego przyśpieszenia swobodnego spadku g_n=9,80665 ms^{-2}.

Przyjęte oznaczenie na wartość umowną

$$\tilde{X}$$

„Falka" symbolizuje wartość zbliżoną do prawdziwej

Wartość wielkości – interpretacja geometryczna



Dokładność

Dokładność (*ang.* ***accuracy*** [*'ækjuresi*]) – 1. zbieżność zachodząca pomiędzy wartością wielkości zmierzoną, a wartością wielkości prawdziwą (Słownik 2010) , 2. właściwość przyrządu pomiarowego dawania odpowiedzi bliskich wartości prawdziwej (Słownik 1996), 3. właściwość charakteryzująca zdolność narzędzia pomiarowego do wskazywania wartości wielkości bliskich rzeczywistej wartości wielkości mierzonej (PN-71/N-02050).

Uwagi

-Dokładność jest pojęciem **jakościowym** i nie jest wyrażana liczbowo.

-Pojęcia dokładności nie należy mylić z pojęciem **precyzji**.

-Z pojęciem dokładność związane są pojęcia: **klasa dokładności** i **wskaźnik klasy** dokładności, które będą omówione później i których znaczenie jest inne od pojęcia dokładność.

-**Pojęcie dokładność** (***accuracy***) **jest nadużywane** przez producentów przyrządów pomiarowych ze względów marketingowych, zamiast pojęć błąd graniczny i niepewność pomiarów.

Dokładność (*ang.* ***accuracy*** *)* – **niewłaściwe użycie !!!**

34405A Multimeter

5.5 Digit Dual Display, Benchtop DMM
More Capabilities at a Value Price

Agilent Technologies

DC Specifications[1]

Table 24 DC Accuracy ± (% of reading + % of range)

To jest **błąd graniczny !!!**

Function	Range [2]	Test Current or Burden Voltage	Input Impedance [13]	1 Year 23° C ± 5° C	Temperature Coefficient 0° C - 18° C 28° C - 55° C
DC Voltage	100.000mV	-	10MΩ ±2%	0.025+0.008	0.0015+0.0005
	1.00000V	-	10MΩ ±2%	0.025+0.006	0.0010+0.0005
	10.0000V	-	10.1MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	100.00V	-	10.1MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	1000.0V	-	10MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0015+0.0005

Niedokładność

Niedokładność – przeciwieństwo dokładności, pojęcie **jakościowe** wyrażające fakt występowania różnicy pomiędzy wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą.

W metrologii zaleca się **nie stosować** pojęcia ~~**niedokładność!**~~

Z tego względu pojęcia niedokładność **nie definiuje się**.

Niedokładność wyraża się ilościowo za pomocą pojęć:

- **błąd pomiaru** lub
- **niepewność pomiaru.**

Precyzja

Precyzja – zbieżność zachodząca pomiędzy wartościami wielkości zmierzonymi otrzymanymi przy powtarzaniu pomiarów na tym samym lub podobnych obiektach w określonych warunkach.

Jeśli warunki pomiaru **nie ulegają zmianie** to mówimy o **powtarzalności** pomiarów.

Jeśli warunki **ulegają zmianie**, to mówimy o **odtwarzalności** pomiarów.

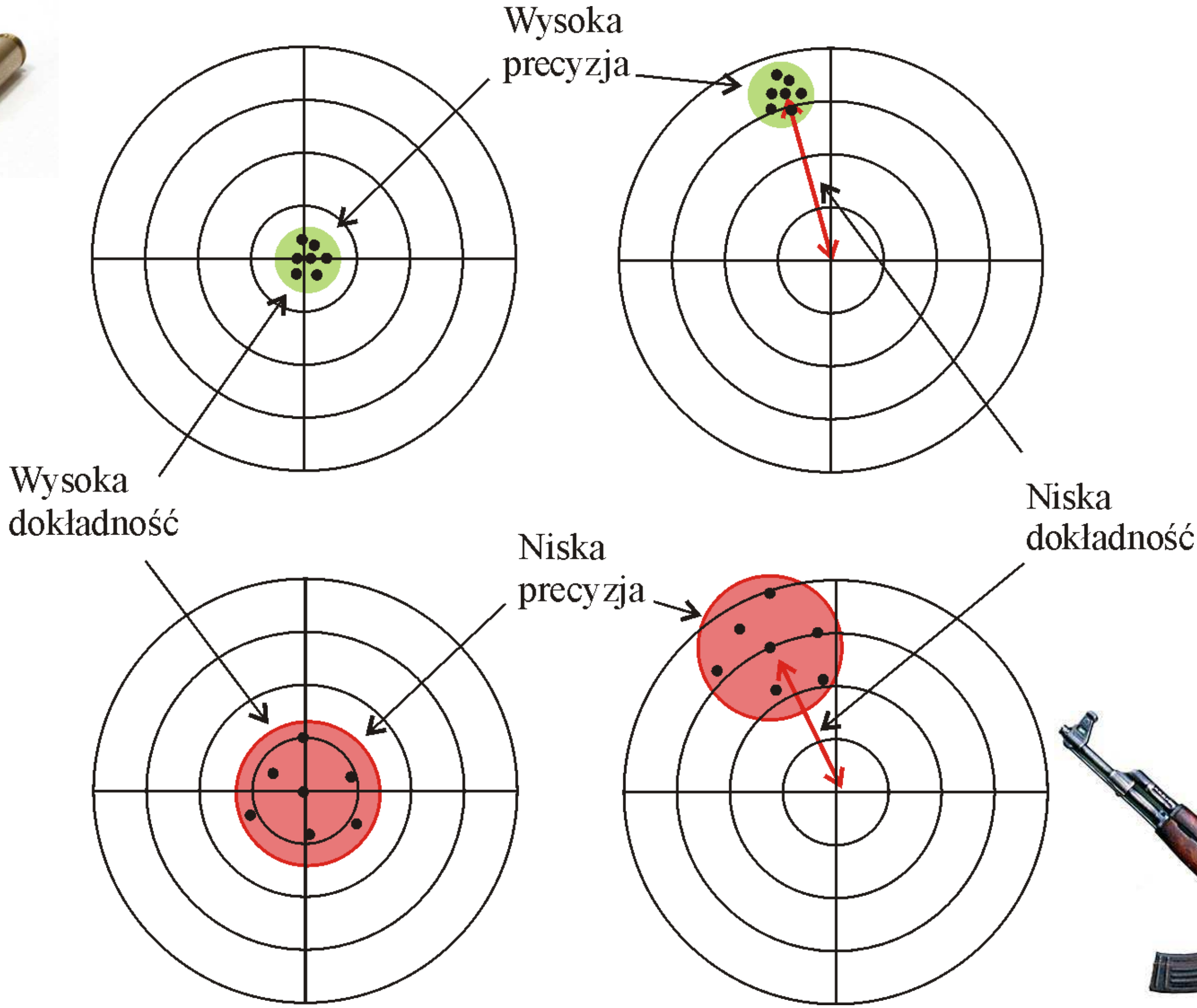
Uwagi

-Precyzja (podobnie jak dokładność) jest pojęciem **jakościowym** i nie jest wyrażana liczbowo.

-Pojęcia **precyzji** nie należy mylić z pojęciem **dokładności**.

-Pojęcia dokładność i precyzja często są ilustrowane za pomocą wyników strzelania do tarczy.

Dokładność i precyzja – ilustracja strzelecka



Czułość i rozdzielczość

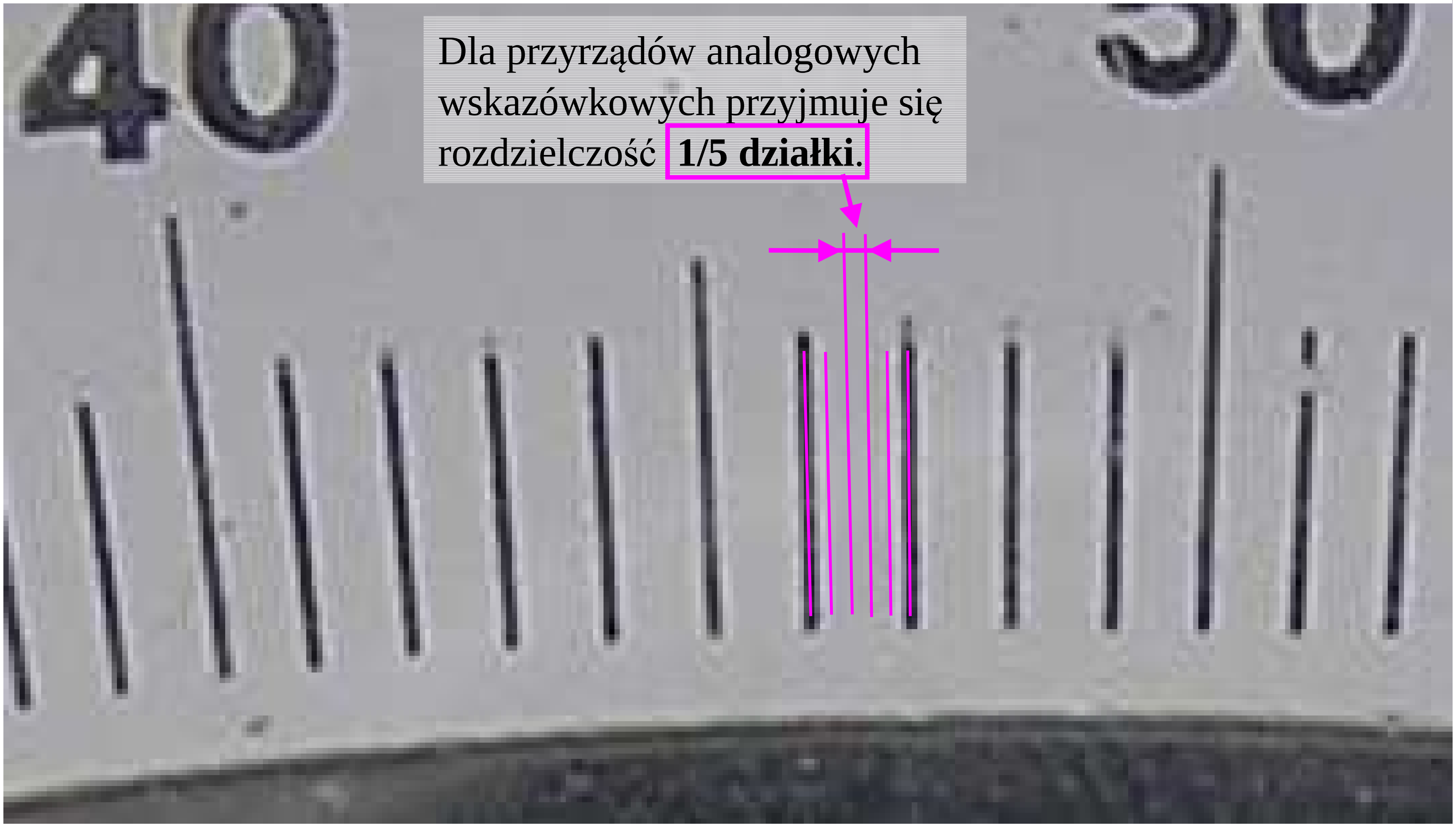
Czułość (*ang.* ***Sensitivity***) – iloraz przyrostu odpowiedzi Δy przyrządu pomiarowego (jego wskazania) przez odpowiadający mu przyrost sygnału wejściowego Δx.

$$S = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \; y = f(x)$$

Rozdzielczość (*ang. resolution*) – najmniejsza różnica wskazania urządzenia wskazującego, która może być zauważona w wyraźny sposób. Dla przyrządów cyfrowych jest to różnica wskazań odpowiadająca zmianie o **jednostkę najmniej znaczącej cyfry**.

Dla przyrządów analogowych przyjmuje się rozdzielczość 1/5 działki.

Rozdzielczość przyrządu analogowego



Dla przyrządów analogowych wskazówkowych przyjmuje się rozdzielczość **1/5 działki**.

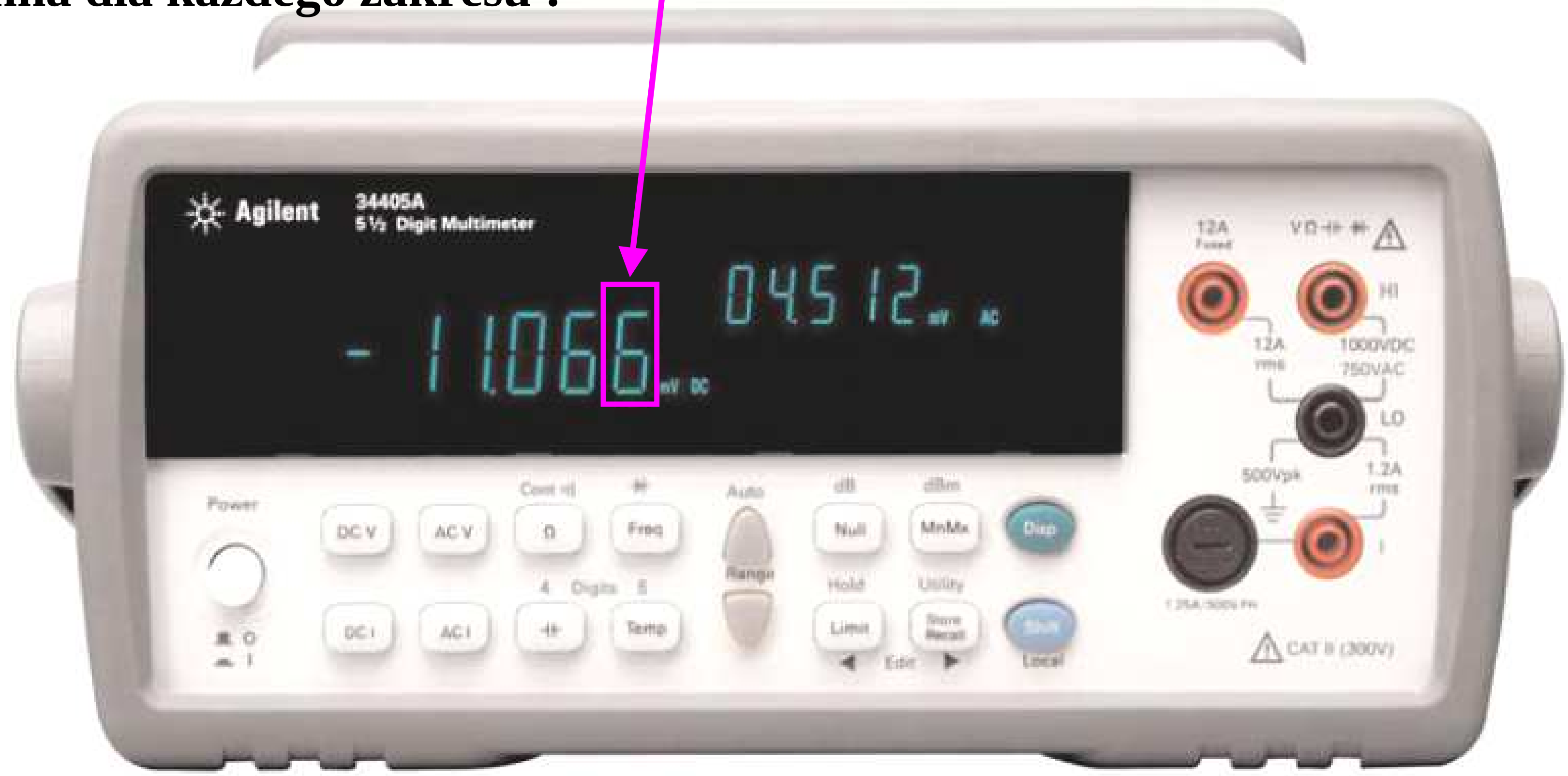
Rozdzielczość (*ang. resolution*) przyrządu cyfrowego

Rozdzielczość dla przyrządów cyfrowych jest to różnica wskazań odpowiadająca zmianie o jednostkę najmniej znaczącej cyfry, tutaj 1μV na zakresie 100mV. Tak podana rozdzielczość jest **inna dla każdego zakresu !**

Agilent Technologies

34405A Multimeter

5.5 Digit Dual Display, Benchtop DMM
More Capabilities at a Value Price



Rozdzielczość przyrządu cyfrowego – drugi sposób

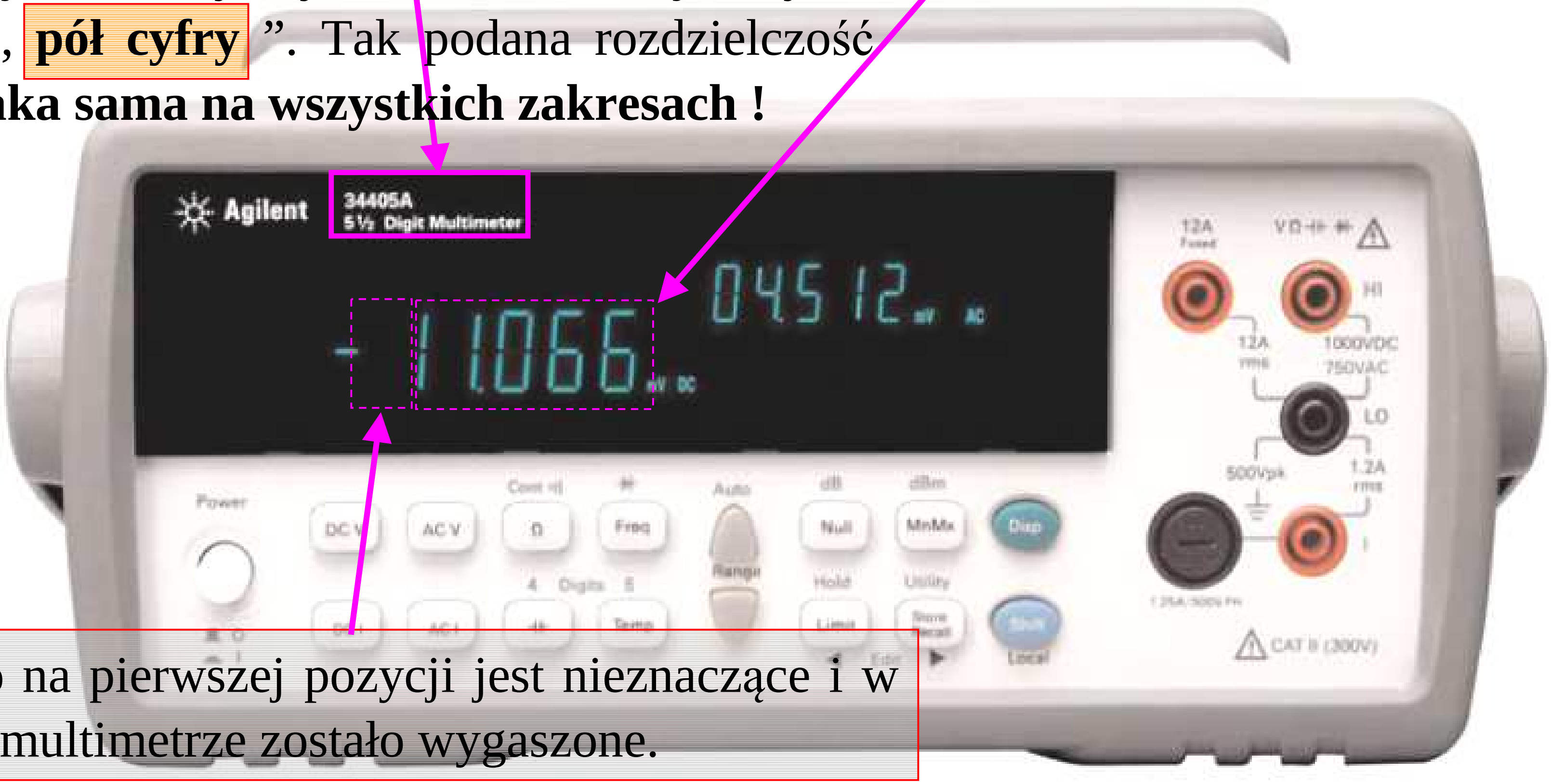
Producent podaje rozdzielczość tego multimetru jako „ pięć i pół cyfry ”. Oznacza to, że wyświetlacz pokazuje 5 „pełnych cyfr” (mogą być on równe od 0 do 9), ale na pierwszej pozycji może być tylko 0 lub 1, to jest tylko tzw. „ **pół cyfry** ”. Tak podana rozdzielczość jest **taka sama na wszystkich zakresach !**

Agilent Technologies

34405A Multimeter

5.5 Digit Dual Display, Benchtop DMM

More Capabilities at a Value Price



Zero na pierwszej pozycji jest nieznaczące i w tym multimetrze zostało wygaszone.

10µV

Rozdzielczość przyrządu cyfrowego – trzeci sposób

BM 857 , BM859CF

Producent podaje rozdzielczość tego multimetru jako:

„ cztery i cztery piąte cyfry ”. Oznacza to, że wyświetlacz pokazuje 4 „pełne cyfry” (mogą być on równe od 0 do 9), ale na pierwszej pozycji może być tylko 0, 1, 2, 3, lub 4, to jest tylko tzw. „ **cztery piąte cyfry** ”. Tak podana rozdzielczość jest **taka sama na wszystkich zakresach !**

Producent tego multimetru podaje również zamiennie rozdzielczość na trzeci sposób: **50000 jednostek**, tzn. że na wyświetlaczu może być pokazanych 50000 różnych wskazań: od 00000 do 49999. Tak podana rozdzielczość jest **taka sama na wszystkich zakresach !**

Na zakresie 500,00mV rozdzielczość wynosi 10µV .

W tym multimetrze nieznaczące zera nie są wygaszane. Ustawiony tutaj zakres to 500,00mV.

Dokładność, precyzja, czułość i rozdzielczość w praktyce

Dokładność, precyzja, czułość i rozdzielczość opisują **różne** właściwości przyrządu pomiarowego. Dobrze zaprojektowany przyrząd pomiarowy powinien być **dokładny**, posiadać wysoką **rozdzielczość** i **precyzję** oraz dużą **czułość**.

W praktyce jest to trudne do osiągnięcia.

Stosunkowo **łatwo** jest osiągnąć wysoką **rozdzielczość** i dużą **czułość**, a znacznie **trudniej** dobrą **dokładność** i **precyzję**.

Z tego względu w sprzedaży dostępnych jest dużo przyrządów pomiarowych o **wysokiej rozdzielczości** i **dużej czułości**, ale **mało dokładnych** i **nieprecyzyjnych**.

Błąd – ogólnie, potocznie i niemetrologicznie

Błąd (*ang.* ***error*** [*'erə*(*r*)]) – rozbieżność między dwoma porównywanymi obiektami, z których jeden odtwarza lub zastępuje drugi, a drugi jest odniesieniem lub wzorcem dla pierwszego, inaczej w uproszczeniu i dużym skrócie:

rozbieżność pomiędzy tym, co jest, a tym, co być powinno.

Uwagi

-Porównywanymi obiektami mogą być **cechy** przedmiotów i zdarzeń, twory abstrakcyjne, procedury postępowania itp. (np.: błąd ortograficzny, błąd aproksymacji, błąd logiczny).

-Jeśli porównywanymi obiektami są liczby (np.: wyniki pomiarów), to błąd również może być wyrażony odpowiednią **liczbą**, czyli może być wyznaczony **ilościowo**.

-Jeżeli występuje **nadmiar**, czyli jeśli czegoś jest za dużo w stosunku do tego, co powinno być, to błąd jest **dodatni** i odwrotnie, jeśli występuje **niedobór** to błąd jest **ujemny**.

Błąd pomiaru (bezwzględny)

Błąd pomiaru – **różnica** między wartością wielkości **zmierzoną** (czyli wynikiem pomiaru) a wartością **prawdziwą** wielkości mierzonej.

$$\Delta \hat{x} = \hat{x} - \dot{x}$$

Uwagi

-Tak zdefiniowany błąd nazywamy również błędem **bezwzględnym**, dla odróżnienia go od błędu **względnego.**

-Błąd (bezwzględny) ma tę samą **jednostkę**, co wielkość mierzona.

-Jeśli wynik pomiaru jest **za duży** względem wartości prawdziwej, to znak błędu jest **dodatni**., jeśli jest **za mały**, to znak błędu jest **ujemny** !

-Ponieważ wartość **prawdziwa** jest **nieznana**, w praktyce wartość **błędu** jest również **nieznana.**

Błąd pomiaru względny

Błąd pomiaru względny – stosunek błędu pomiaru (bezwzględnego) do wartości prawdziwej wielkości mierzonej, zazwyczaj wyrażany w procentach lub w ppm.

$$\delta \hat{x} = \frac{\Delta \hat{x}}{\dot{x}} = \frac{\hat{x} - \dot{x}}{\dot{x}}$$

Uwagi

-Tak zdefiniowany błąd **względny** jest wielkością bezwymiarową, dla wygody bywa wyrażany w **procentach** lub w **ppm** (*parts per million* – części na jeden milion, część jednomilionowa),

np.: 1% = 10^{-2} = 10^{4} x 10^{-6} = 10 000 ppm, 1ppm = 0,0001%

Błąd (przyrządu pomiarowego) zredukowany

Błąd zredukowany, unormowany, sprowadzony, zakresowy (przyrządu pomiarowego) – stosunek błędu pomiaru (bezwzględnego) przyrządu pomiarowego do wybranej wartości charakterystycznej tego przyrządu, **najczęściej do zakresu**.

$$\hat{\delta x}_{zak} = \frac{\hat{\Delta x}}{x_{zak}} = \frac{\hat{x} - \dot{x}}{x_{zak}}$$

Uwagi

-Tak zdefiniowana wartość charakterystyczna bywa również nazywana **wartością umowną**.

-Wartością charakterystyczną może być górna granica zakresu pomiarowego (zakres), obszar pomiarowy lub inna jednoznacznie określona wartość (więcej na ten temat będzie mówione później).

-Błąd zredukowany, podobnie jak błąd względny, jest wielkością **bezwymiarową** i również dla wygody bywa wyrażany w **procentach %** lub w **ppm**.

Błędy prawdziwe i błędy umowne

Błędy wyznaczone na podstawie wartości prawdziwej $\dot{x}$ nazywamy **błędami prawdziwymi**. Ponieważ wartość prawdziwa jest nieznana, w praktyce **nie jest możliwe** wyznaczenie błędów prawdziwych.

Zastępując wartość prawdziwą $\dot{x}$ wartością umowną $\tilde{x}$ możemy zdefiniować analogicznie **błędy umowne**: bezwzględny, względny i zredukowany.

Błędy umowne praktycznie możemy wyznaczyć np.: podczas sprawdzania przyrządu pomiarowego za pomocą przyrządu wzorcowego o wyższej dokładności, którego wskazania możemy uznać za wartości umowne (umownie prawdziwe, poprawne).

Błędy umowne

Błąd umowny bezwzględny

$$\Delta \tilde{x} = \hat{x} - \tilde{x}$$

Błąd umowny względny

$$\delta \tilde{x} = \frac{\Delta \tilde{x}}{\tilde{x}} = \frac{\hat{x} - \tilde{x}}{\tilde{x}}$$

Błąd umowny zakresowy

$$\delta \tilde{x}_{zak} = \frac{\Delta \tilde{x}}{x_{zak}} = \frac{\hat{x} - \tilde{x}}{x_{zak}}$$

Błąd graniczny

Błędy prawdziwe i błędy umowne mają w praktyce ograniczone zastosowanie.

Praktycznie przydatne jest natomiast pojęcie **błędu granicznego.**

Błąd graniczny - jest to **ekstremalna** wartość błędu (dodatnia lub ujemna), taka że prawdopodobieństwo jej przekroczenia przez wartość błędu któregokolwiek z pomiarów jest znikomo małe.

Mimo więc, że nie znamy wartości prawdziwej i błędu prawdziwego, to możemy zapisać, że:

$$\hat{x} - \Delta_{gr}\hat{x} \le \dot{x} \le \hat{x} + \Delta_{gr}\hat{x}$$

Błąd graniczny, c.d.

To samo możemy zapisać w innej postaci:

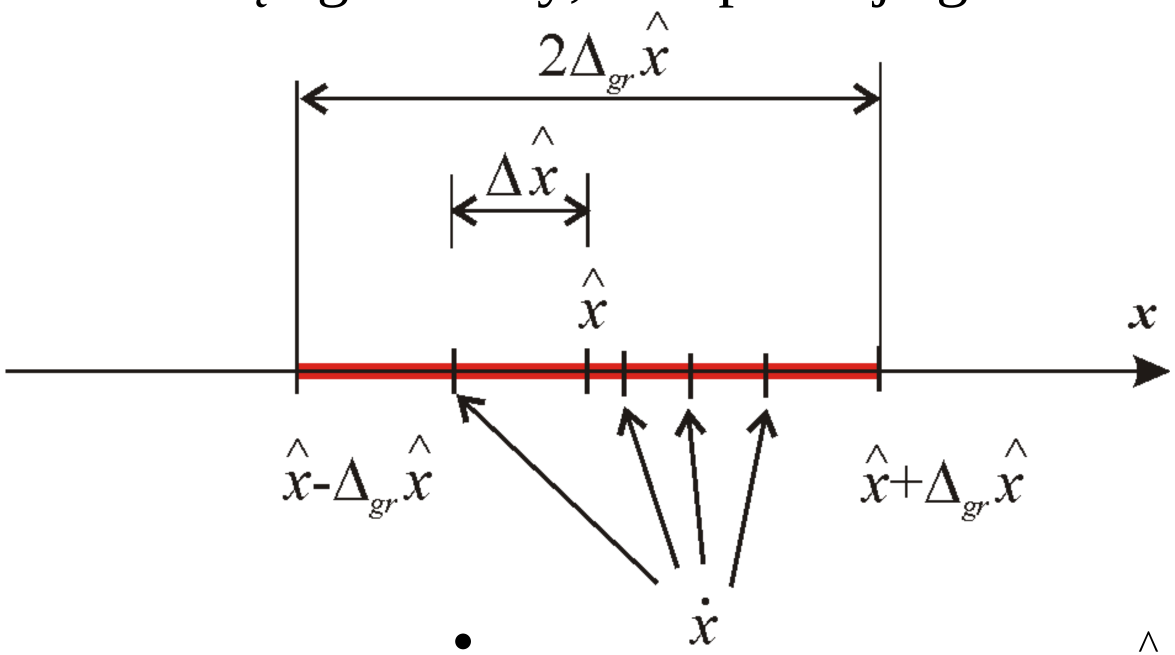
$$\dot{x} \in \left[\hat{x} - \Delta_{gr} \hat{x} \ , \ \hat{x} + \Delta_{gr} \hat{x} \right]$$

Najczęściej stosuje się najprostszy zapis w postaci:

$$\dot{x} = \hat{x} \pm \Delta_{gr} \hat{x}$$

tzn. że wartość prawdziwa $\dot{x}$ leży w przedziale $\pm \Delta_{gr} \hat{x}$ wokół wartości zmierzonej $\hat{x}$.

Błąd graniczny, interpretacja graficzna



wartość prawdziwa $\dot{x}$ leży w przedziale $\pm\Delta_{gr}\hat{x}$ wokół wartości zmierzonej $\hat{x}$, ale nie wiemy dokładnie w którym miejscu.

$$\Delta_{gr}\hat{x} \geq \left|\Delta\hat{x}\right|$$

Błąd graniczny **Błąd prawdziwy**

Błędy graniczne

Błąd graniczny bezwzględny

$$\Delta_{gr}\hat{x} \geq |\Delta\hat{x}|$$

Błąd graniczny względny

$$\delta_{gr}\hat{x} = \frac{\Delta_{gr}\hat{x}}{\hat{x}}$$

Błąd graniczny zakresowy

(najbardziej przydatny w praktyce)

$$\boxed{\delta_{gr\,zak}\hat{x} = \frac{\Delta_{gr}\hat{x}}{x_{zak}}}$$

Możemy wyznaczyć sprawdzając miernik za pomocą miernika **wzorcowego**

Błędy - zestawienie

Błąd	bezwzględny	względny	zakresowy
prawdziwy	$\Delta \hat{x} = \hat{x} - \dot{x}$	$\delta \hat{x} = \dfrac{\Delta \hat{x}}{\dot{x}}$	$\delta \hat{x}_{zak} = \dfrac{\Delta \hat{x}}{x_{zak}}$
umowny	$\Delta \tilde{x} = \hat{x} - \tilde{x}$	$\delta \tilde{x} = \dfrac{\Delta \tilde{x}}{\tilde{x}}$	$\delta \tilde{x}_{zak} = \dfrac{\Delta \tilde{x}}{x_{zak}}$
graniczny	$\Delta_{gr} \hat{x} \geq \lvert \Delta \hat{x} \rvert$	$\delta_{gr} \hat{x} = \dfrac{\Delta_{gr} \hat{x}}{\hat{x}}$	$\boxed{\delta_{gr\ zak} \hat{x} = \dfrac{\Delta_{gr} \hat{x}}{x_{zak}}}$

Błąd graniczny unormowany (zakresowy) wykorzystywany jest do określania **klasy dokładności** przyrządów pomiarowych

Klasa dokładności

Klasa dokładności – klasa przyrządów pomiarowych, które spełniają określone wymagania metrologiczne dotyczące utrzymania dopuszczalnych błędów w określonych granicach dla określonych warunków pracy.

Wskaźnik klasy (oznaczenie klasy) – na ogół liczba (lub inny znak przyjęty umownie) określająca klasę dokładności i wyznaczająca graniczne wartości bezwzględnego **błędu podstawowego** wyrażonego w procentach wartości umownej. Wartością umowną może być: **zakres** (górna granica zakresu pomiarowego), **wartość wskazywana**, **długość łuku podziałki**, **obszar pomiarowy** (różnica algebraiczna pomiędzy wartościami górnej i dolnej granicy zakresu pomiarowego).

Oznaczanie klasy mierników analogowych

PN-92/E-06501 Elektryczne przyrządy pomiarowe ...

1

Wskaźnik klasy (np.: 1) w przypadku, gdy błąd dopuszczalny miernika wyraża się w % **górnej granicy zakresu pomiarowego** (zakresu).

Najczęściej stosowane oznaczenie dla większości mierników analogowych.

1

Wskaźnik klasy (np.: 1) w przypadku, gdy błąd dopuszczalny miernika wyraża się w % **wartości wielkości mierzonej**.

Stosowane w przyrządach, dla których nie określa się zakresu, np.: liczniki energii elektrycznej.

1

Wskaźnik klasy (np.: 1) w przypadku, gdy błąd dopuszczalny miernika wyraża się w % **długości łuku podziałki.**

Stosowane w przyrządach posiadających bardzo nieliniową skalę, np.: omomierze.

| 1 |

Wskaźnik klasy (np.: 1) w przypadku, gdy błąd dopuszczalny miernika wyraża się w % **obszaru pomiarowego.**

Stosowane w przypadku, gdy zakres pomiarowy nie obejmuje całej podziałki, np.: amperomierze rozruchowe.

Oznaczanie klasy - stosowane wartości

PN-92/E-06501 Elektryczne przyrządy pomiarowe ...

Dla większości przyrządów pomiarowych wskaźniki klas powinny być wybrane z ciągu wartości:

0,05 ; **0,1** ; **0,2** ; **0,3** ; **0,5** ; **1** ; **1,5** ; **2** ; **2,5** ; **3** ; **5** .

Za wyjątkiem omomierzy, nie stosuje się oznaczania przyrządów pomiarowych klasą gorszą niż **5.**

Klasa gorsza niż 5 oznacza, że mamy do czynienia nie z przyrządem pomiarowym, ale ze **wskaźnikiem!**

Oznaczanie klasy – najczęstszy przypadek

1 Najczęściej stosowany dla mierników analogowych wskaźnik klasy (tutaj: ***kl*** = 1) określa dopuszczalny błąd podstawowy miernika (błąd graniczny dopuszczalny, granice błędów dopuszczalnych) wyrażony w **% górnej granicy zakresu pomiarowego** (lub krócej: zakresu).

Dopuszczalny błąd podstawowy graniczny przyrządu pomiarowego

Oznaczenie klasy

$$kl = \frac{\Delta_{gr} \hat{x}}{x_{zak}} \cdot 100\%$$

Wartość odniesienia, tutaj zakres

Znak procentów w oznaczeniu klasy pomijamy

Praktyczne wykorzystanie oznaczenia klasy

W praktyce, na podstawie odczytanego z przyrządy pomiarowego oznaczenia klasy ***kl*** obliczamy

bezwzględny dopuszczalny błąd podstawowy miernika

(błąd graniczny dopuszczalny, granice błędów dopuszczalnych), posiada on tą samą **jednostkę**, co wielkość mierzona.

Oznaczenie klasy

Wartość odniesienia, tutaj zakres

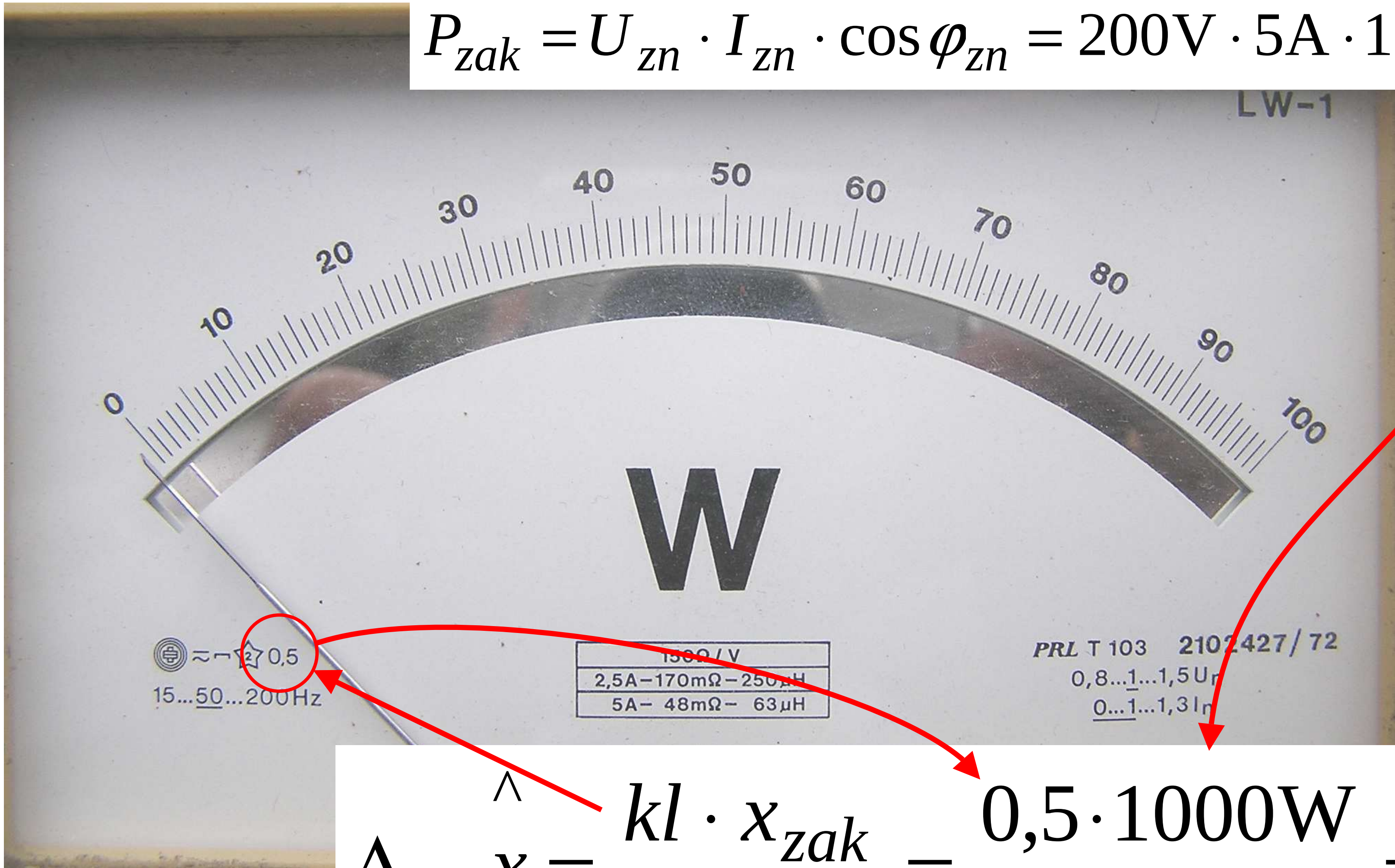
$$\Delta_{gr}\hat{x} = \frac{kl \cdot x_{zak}}{100}$$

Dopuszczalny błąd podstawowy graniczny przyrządu pomiarowego

Znak procentów w oznaczeniu klasy został pominięty

Klasa – przykład obliczeniowy - watomierz

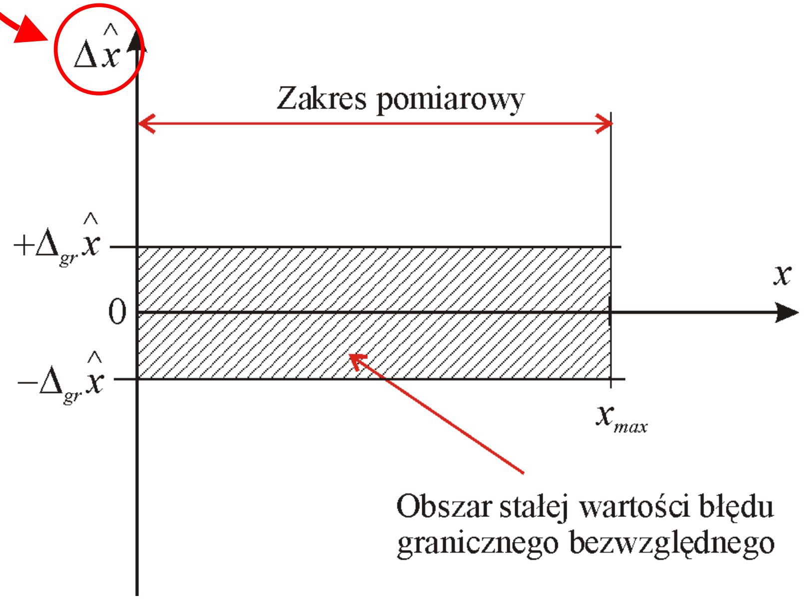
$$P_{zak} = U_{zn} \cdot I_{zn} \cdot \cos\varphi_{zn} = 200\text{V} \cdot 5\text{A} \cdot 1 = 1000\text{W}$$

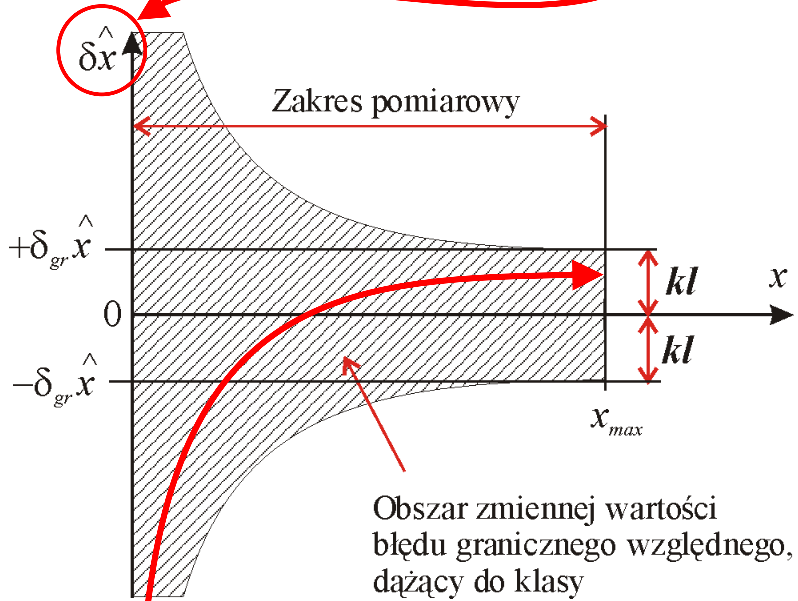


$$\hat{\Delta}_{gr}\, x = \frac{kl \cdot x_{zak}}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 1000\text{W}}{100} = 5\text{W}$$

Błąd graniczny bezwzględny i względny

Błąd graniczny bezwzględny dla przyrządu z oznaczeniem klasy ***kl*** odniesionym do zakresu jest **stały** w całym zakresie pomiarowym, natomiast błąd graniczny względy zmienia się i **maleje** wraz ze wzrostem wartości mierzonej.

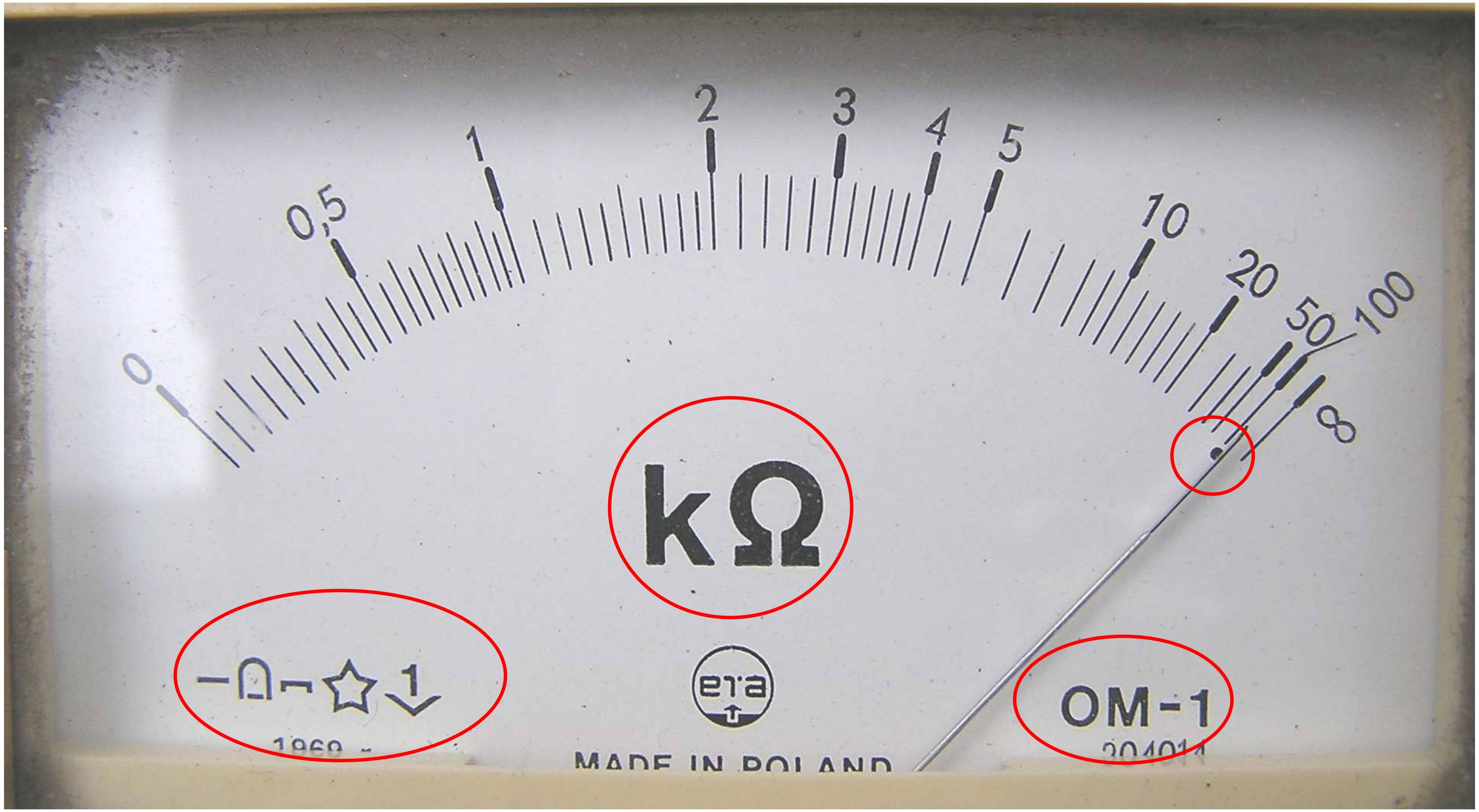




Wniosek:

należy tak dobierać zakres pomiarowy, aby wskazanie na przyrządzie pomiarowym było jak największe, co zapewnia najmniejsze błędy względne wyniku pomiaru.

Klasa i inne oznaczenia – przykład omomierz



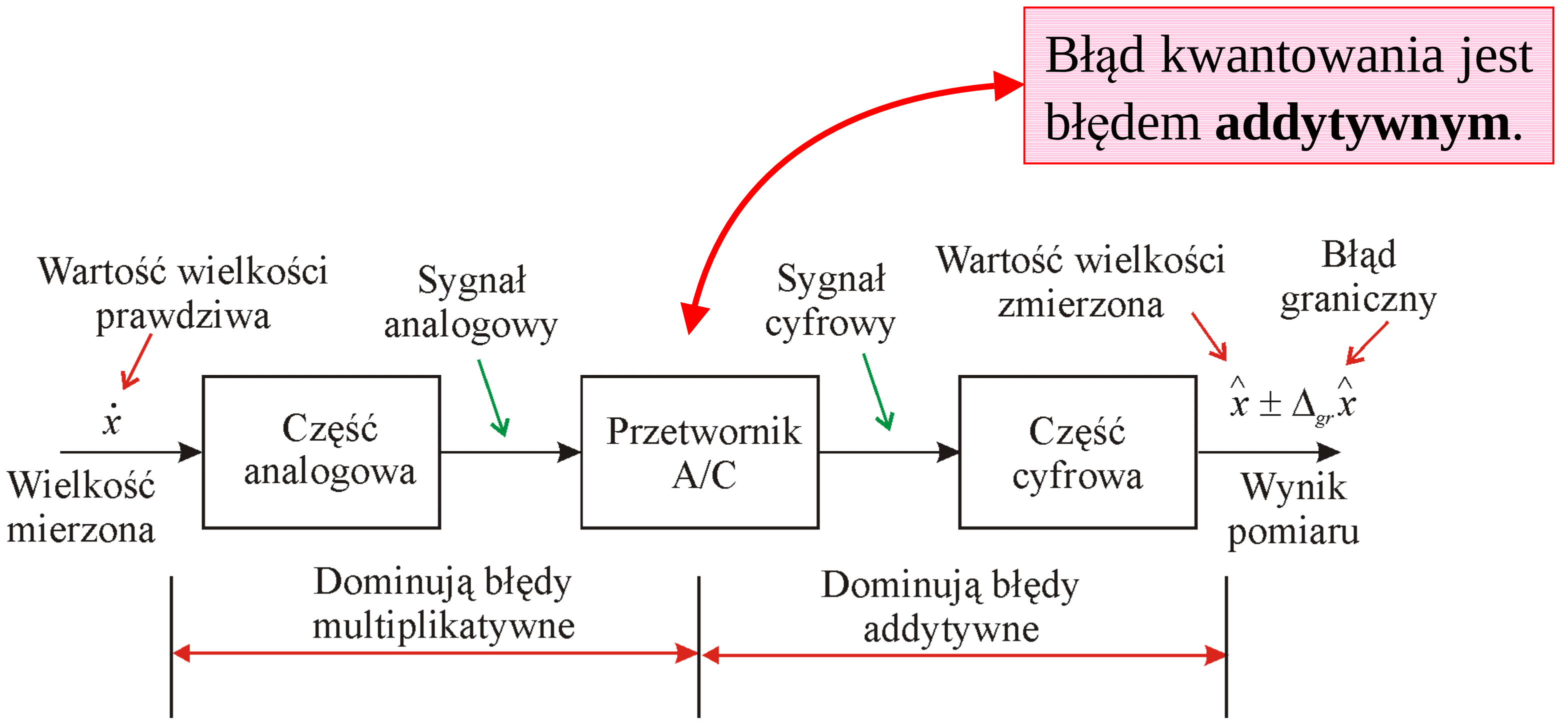
Błędy mierników cyfrowych

W miernikach **analogowych** jeden z błędów (addytywny lub multiplikatywny) jest **znacznie większy od drugiego**, dlatego dla tych mierników klasę definiuje się **albo** względem **zakresu albo** względem **wartości zmierzonej**.

W miernikach **cyfrowych** oba te błędy (addytywny oraz multiplikatywny) mają **porównywalne** wartości, dlatego dla tych mierników klasę definiuje się jako **sumę** dwóch składników: jednego odniesionego do wartości **zmierzonej** i drugiego odniesionego do **zakresu**.

Sposób zapisu klasy dla mierników cyfrowych nie został znormalizowany, w praktyce różni producenci stosuję własny system zapisu.

Źródła błędów mierników cyfrowych



W miernikach cyfrowych błędy **multiplikatywne** (części analogowej) i błędy **addytywne** (części cyfrowej) są **porównywalnej wartości**.

Definiowanie błędów granicznych mierników cyfrowych

Ponieważ:

w miernikach cyfrowych błędy **multiplikatywne** (części analogowej) i błędy **addytywne** (części cyfrowej) są **porównywalnej wartości**,

dlatego:

w miernikach cyfrowych błąd graniczny definiuje się jako **sumę dwóch oddzielnych składników**:

multiplikatywnego i addytywnego.

W praktyce stosowane są najczęściej dwa sposoby zapisu błędu granicznego dla miernika cyfrowego.

Agilent Technologies

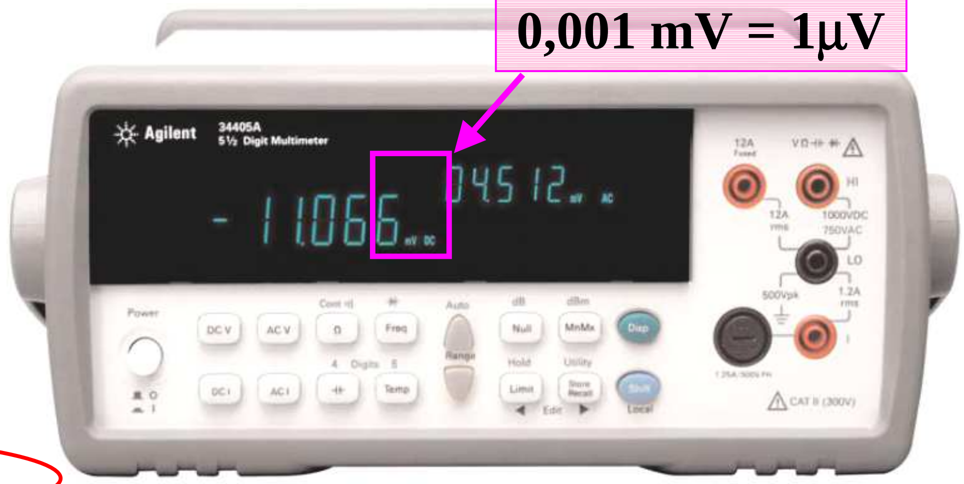
Oznaczanie klasy mierników cyfrowych – przykład 1

rozdzielczość

0,001 mV = 1μV

34405A Multimeter

5.5 Digit Dual Display, Benchtop DMM
More Capabilities at a Value Price



DC Specifications[1]

Table 24 DC Accuracy ± (% of reading + % of range)

Function	Range [2]	Test Current or Burden Voltage	Input Impedance [13]	1 Year 23° C ± 5° C	Temperature Coefficient 0° C - 18° C 28° C - 55° C
DC Voltage	100.000mV	-	10MΩ ±2%	0.025+0.008	0.0015+0.0005
	1.00000V	-	10MΩ ±2%	0.025+0.006	0.0010+0.0005
	10.0000V	-	10.1MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	100.00V	-	10.1MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	1000.0V	-	10MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0015+0.0005

Accuracy !!!
czyli błąd graniczny

warunki odniesienia

granice nominalnego zakresu użytkowania

Oznaczanie klasy mierników cyfrowych – pierwszy sposób

Agilent Technologies

Pierwszy sposób: *a*% z odczytu (ang. *rdg – reading*) + *b*% z zakresu (ang. *FSR – Full Scale Range*)

$$\pm\left(a\,\%\,rdg + b\,\%\,FSR \right)$$

część błędu multiplikatywna

część błędu addytywna

Przykład: 0,025% z odczytu napięcia U_x + 0,008% z zakresu 100 mV

$$\pm\left(0{,}025\,\%\cdot U_x + 0{,}008\,\%\cdot 100\ \mathrm{mV} \right)$$

Jeśli odczytano napięcie U_x = 100 mV na zakresie 100 mV, to **błąd graniczny** wynosi **±0,033 mV**, przy czym **rozdzielczość** miernika na tym zakresie wynosi **0,001 mV**, a więc jest znacznie lepsza !!!

Oznaczanie klasy mierników cyfrowych – przykład 2

USER'S MANUAL BM 857 , BM859CF - BRYMEN

d=0,01 mV = 10μV

rozdzielczość

BRYMEN®
BRIGHT PEOPLE'S CHOICE

ELECTRICAL SPECIFICATIONS

Accuracy is ±(% reading digits + number of digits) or otherwise specified, at 23°C ± 5°C & less than 75% relative humidity.

True RMS voltage & current accuracies are specified from 5 % to 100 % of range or otherwise specified. Maximum Crest Factor < 5:1 at full scale & < 10:1 at half scale, and with frequency components within the specified frequency bandwidth for non-sinusoidal waveforms.

DC Voltage

RANGE	BM859CF	BM857
	Accuracy	
500.00 mV, 5.0000V, 50.000V	0.02% + 2d	0.03% + 2d
500.00V	0.04%+2d	0.05% + 2d
1000.0V	0.05%+ 2d	0.1%+2d

NMRR: >60dB @ 50/60Hz

CMRR: >120dB @ DC, 50/60Hz, Rs=1kΩ

Input Impedance: 10MΩ, 30pF nominal (80pF nominal for 500mV range)

Ohms

RANGE	BM859CF	BM857
	Accuracy	
500.00Ω	0.07%+10d	0.1%+6d
5.0000kΩ	0.07%+2d	
50.000kΩ		
500.00kΩ		
5.0000MΩ	0.2%+6d	0.4%+6d
50.000MΩ	2.0%+6d	2.0%+6d

Open Circuit Voltage: < 1.3VDC (< 3VDC for 500Ω range)

Accuracy !!!

warunki odniesienia

Oznaczanie klasy mierników cyfrowych – drugi sposób

Drugi sposób: *a*% z odczytu (ang. *rdg – reading*) + *b* najmniej znaczących cyfr *d* (ang. *d – digit*)

$$\pm\left(a\,\%\, rdg + b\cdot d \right)$$

część błędu multiplikatywna

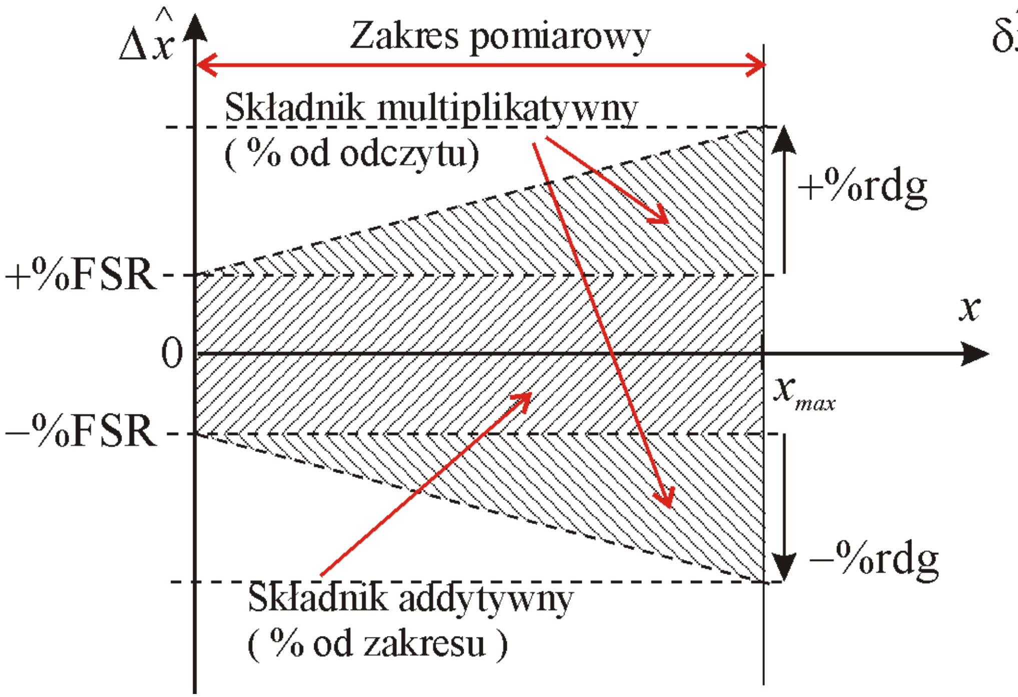
część błędu addytywna

Przykład: 0,03% z odczytu napięcia U_x + 2 najmniej znaczące cyfry o wartości 0,01 mV = 10 μV

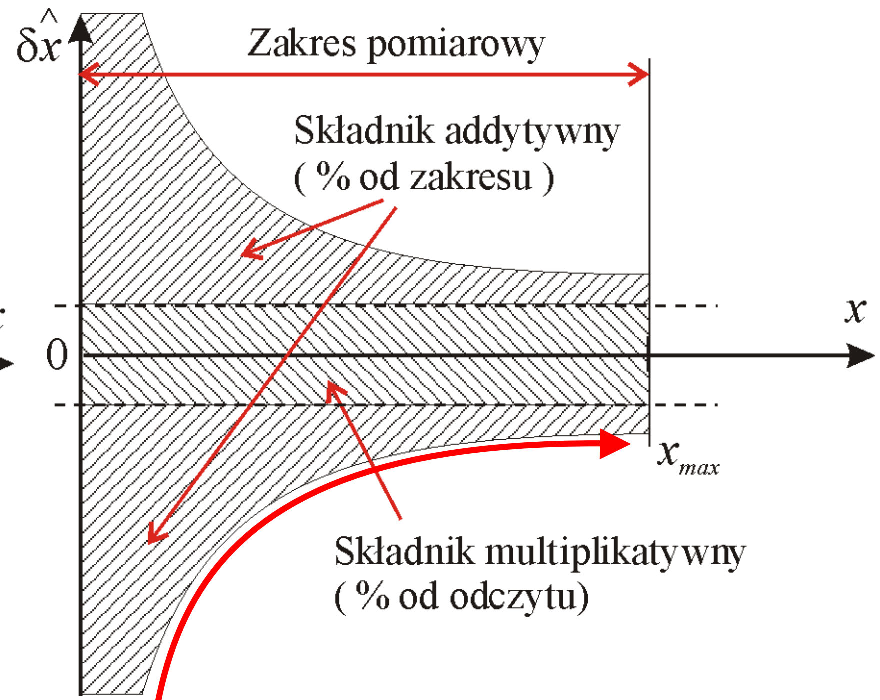
$$\pm\left(0{,}03\,\% \cdot U_x + 2\cdot 10\ \mu V \right)$$

Jeśli odczytano napięcie U_x = 100 mV na zakresie 500 mV, to **błąd graniczny** wynosi **±0,05 mV**, przy czym **rozdzielczość** miernika na tym zakresie wynosi **0,01 mV**, a więc jest znacznie lepsza !!!

Błąd graniczny bezwzględny i względny mierników cyfrowych



Błędy bezwzględne



Błędy względne

Tak samo jak w miernikach analogowych, również w miernikach cyfrowych **dokładniejszy** pomiar otrzymujemy dla **większego** odczytu !!!

Zmienna losowa

Zmienna losowa jest to zmienna (ciągła lub dyskretna), która może przybierać **dowolne wartości** z **określonego zbioru** i z którą związany jest **rozkład prawdopodobieństwa**.

Przykłady:

Wynik rzutu monetą (0,1),

Wynik rzutu kostką do gry (1,2,3,4,5,6),

Wynik losowania Toto Lotka,

Wynik pomiaru napięcia w sieci energetycznej

i wiele innych ...

Rozkład prawdopodobieństwa

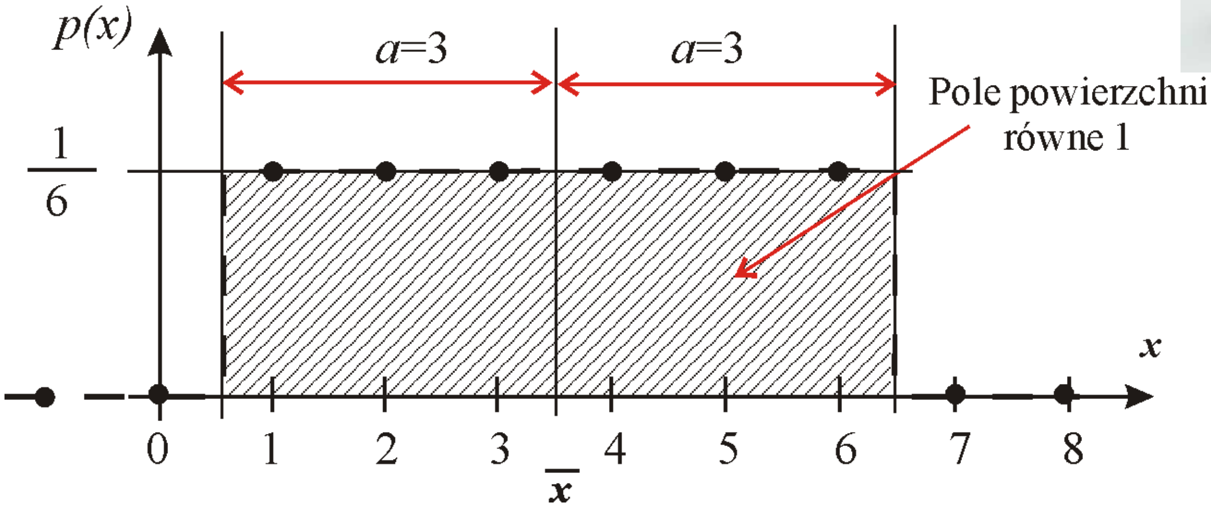
Rozkład prawdopodobieństwa jest funkcją określającą prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmie daną wartość, lub wartość należącą do danego zbioru wartości.

Funkcja prawdopodobieństwa (dla zmiennej dyskretnej) określa, dla każdej wartości x_i zmiennej X, prawdopodobieństwo p_i, że zmienna dyskretna przyjmie wartość x_i:

$$p_i = \Pr\left(X = x_i\right)$$

Rozkład prawdopodobieństwa - przykład

rzut kostką do gry



Rozkład prawdopodobieństwa dla wyników rzutu kostką do gry

Dystrybuanta i funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Dystrybuanta jest to funkcja F określająca dla każdej wartości x prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmuje wartość mniejszą lub równą x:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ (dla zmiennej losowej ciągłej X) jest to pochodna (jeśli istnieje) dystrybuanty:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Pole powierzchni ograniczone **funkcją gęstości prawdopodobieństwa** dla dowolnej zmiennej losowej jest równe **1**

Parametry rozkładu zmiennej losowej

Parametrem rozkładu zmiennej losowej jest wielkość używana do opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej, np.:

- wartość oczekiwana,
- wariancja,
- odchylenie standardowe

i inne wielkości.

Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwana μ jest parametrem rozkładu określonym następująco:

- dla zmiennej losowej **dyskretnej** X przyjmującej wartości x_i z prawdopodobieństwem p_i wartość oczekiwana μ, jeśli istnieje, jest równa:

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie wartości x_i zmiennej X,

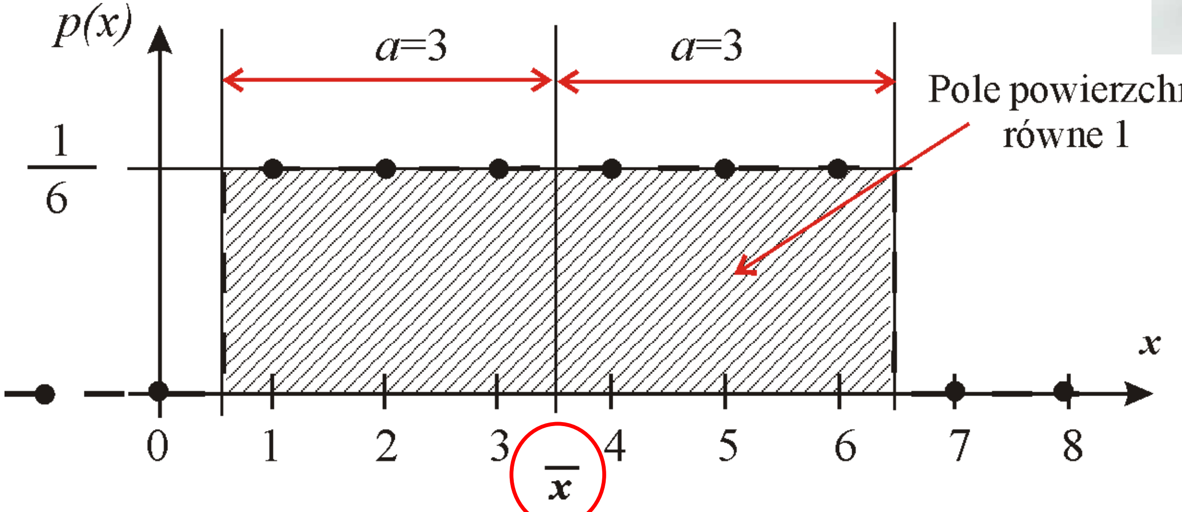
- dla zmiennej losowej **ciągłej** X o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ wartość oczekiwana μ, jeśli istnieje, jest równa:

$$\mu = E(X) = \int x \ f(x) \, dx$$

gdzie całkowanie rozciąga się na cały przedział zmienności X.

Wartość oczekiwana - przykład

rzut kostką do gry



$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Zmienna losowa centrowana

Zmienna losowa centrowana jest to zmienna, której wartość oczekiwana jest równa **zero**.

Jeśli zmienna losowa X ma wartość oczekiwaną μ to odpowiadająca jej zmienna losowa centrowana jest równa (X-μ).

$$E\left(X-\mu\right)=0$$

Wariancja i odchylenie standardowe

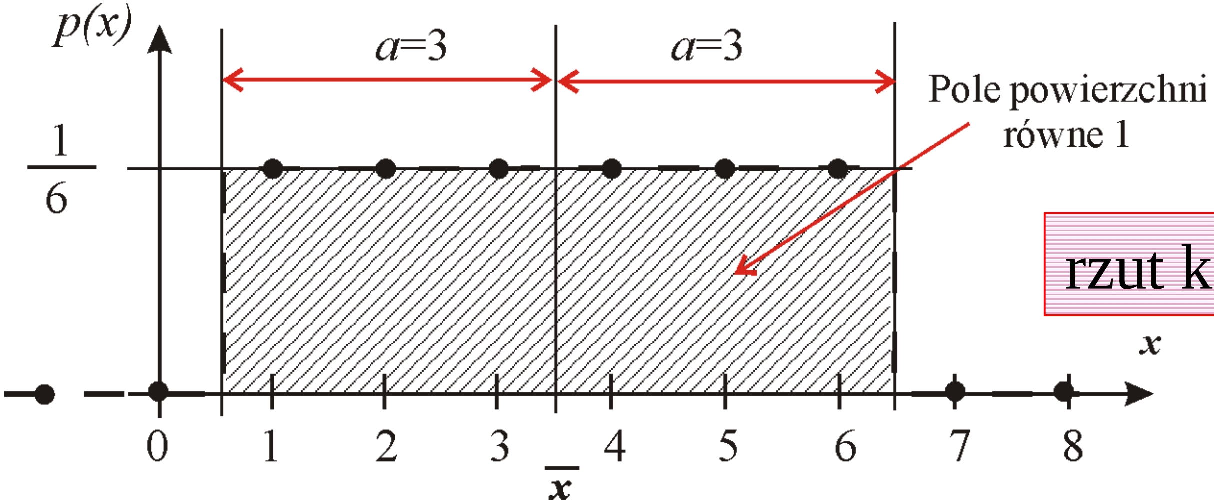
Wariancja σ² (*sigma kwadrat*) jest to wartość oczekiwana kwadratu zmiennej losowej centrowanej:

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\}$$

Odchylenie standardowe σ (*sigma*) jest dodatnim pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Wariancja i odchylenie standardowe - przykład



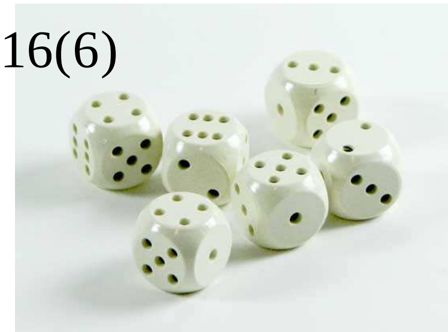
rzut kostką do gry

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \frac{1}{6}(1-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(2-3{,}5)^2 + \cdots + \frac{1}{6}(6-3{,}5)^2 =$$

$$= \frac{2}{6}(2{,}5)^2 + \frac{2}{6}(1{,}5)^2 + \frac{2}{6}(0{,}5)^2 = \frac{6{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25}{3} = \frac{8{,}75}{3} = 2{,}916(6)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}916(6)} \cong 1{,}70783$$



Populacja i próba z populacji

Tak określone parametry rozkładów (wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe) są określone dla całej **populacji**, czyli dla ogółu jednostek podlegających obserwacjom.

W praktyce liczba obserwacji jest ograniczona do pewnej skończonej wartości, czyli z całej populacji pobierana i analizowana jest **próba** obejmująca tylko część populacji.

Przykłady:

-obserwacja wyników rzucania rzeczywistą kostką do gry,

-badania preferencji wyborczych **wszystkich** Polaków (populacji) na podstawie ankiety przeprowadzonej wśród **próby** reprezentatywnej.

Statystyka, estymacja , estymator

Statystyka jest to funkcja zmiennych losowych w próbie, sama również jest zmienną losową.

Estymacja jest to operacja mająca na celu przypisanie wartości liczbowych parametrom rozkładu wybranego jako **model** statystyczny populacji, na podstawie obserwacji tworzących próbę pobraną z tej populacji.

Estymator jest to statystyka (czyli funkcja zmiennych losowych) stosowana do estymacji parametru populacji.

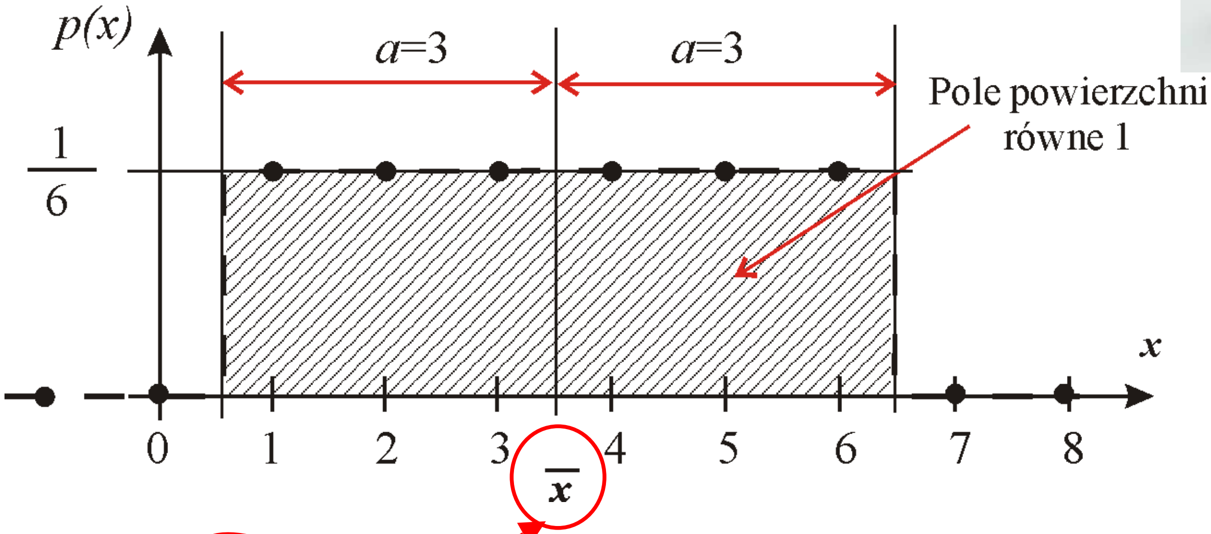
Estymator wartości oczekiwanej

Najlepszym **estymatorem wartości oczekiwanej μ** dla populacji, wyznaczanym na podstawie n - elementowej próby x_1, x_2, ... x_n, jest **wartość średnia $\overline{x}$:**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Estymator wartości oczekiwanej - przykład

rzut kostką do gry



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\frac{n}{6}\cdot 1 + \frac{n}{6}\cdot 2 + \cdots \frac{n}{6}\cdot 6}{n} = 3{,}5$$

Estymator odchylenia standardowego

Najlepszym **estymatorem odchylenia standardowego σ** dla populacji jest **odchylenie standardowe z próby *s***:

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

pierwiastek z uśrednionego kwadratu różnicy od wartości średniej

Liczba elementów w próbie pomniejszona o jeden

Estymator odchylenia standardowego wartości średniej

Wartość średnia $\overline{x}$ jest również zmienna losową !

Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego dla wartości średniej jest:

odchylenie standardowe w próbie

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}$$

pierwiastek z liczebności próby

odchylenie standardowe średniej

Wniosek: odchylenie standardowe średniej z n pomiarów jest $\sqrt{n}$ razy **mniejsze** od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru.

Pomiary wielokrotne i polepszanie dokładności

Wykonywanie serii pomiarów umożliwia **polepszenie dokładności** wyniku. Kolejność postępowania jest następująca:

-wykonujemy serię *n* pomiarów mając na uwadze, że zgodnie z poprzednim slajdem dokładność **polepsza** się $\sqrt{n}$ razy, a więc zwiększanie liczby pomiarów na początku daje duże korzyści, ale dla dużych wartości n kolejne pomiary dają już coraz mniejszy efekt,

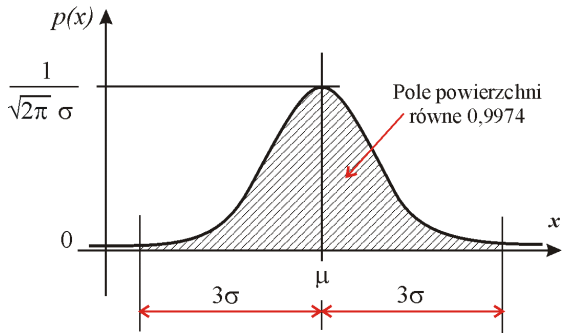
-za wynik pomiaru przyjmujemy wartość średnią,

-na podstawie odchylenia standardowego wartości średniej **szacujemy niepewność uzyskanego wyniku pomiaru**, co będzie przedstawione w dalszej części.

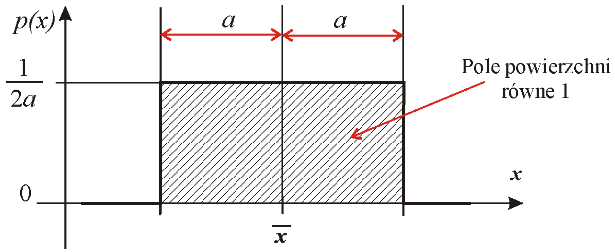
Rozkłady prawdopodobieństwa najczęściej stosowane

Podczas opracowywania wyników pomiarów **najczęściej** stosowane są następujące rozkłady prawdopodobieństwa:

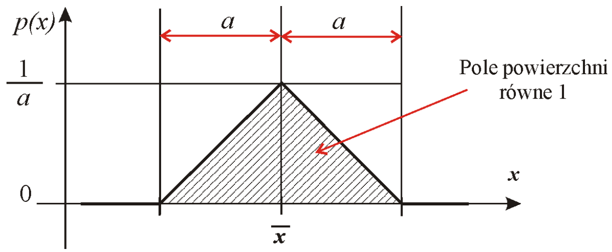
- Rozkład normalny,



- Rozkład równomierny (prostokątny),



- Rozkład trójkątny.



Rozkład normalny

Podczas opracowywania wyników pomiarów najczęściej przydatny jest **rozkład normalny**, dla którego **funkcja gęstości prawdopodobieństwa** jest określona wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Dla rozkładu normalnego, prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale:

od μ - σ do μ + σ jest równe 68,26 %,

od μ - 2σ do μ + 2σ jest równe 95,46 %,

od μ - 3σ do μ + 3σ jest równe **99,74 %.**

Przedział ufności i poziom ufności

Dla rozkładu normalnego, prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale:

od μ - σ do μ + σ jest równe 68,26 %,

od μ - 2σ do μ + 2σ jest równe 95,46 %,

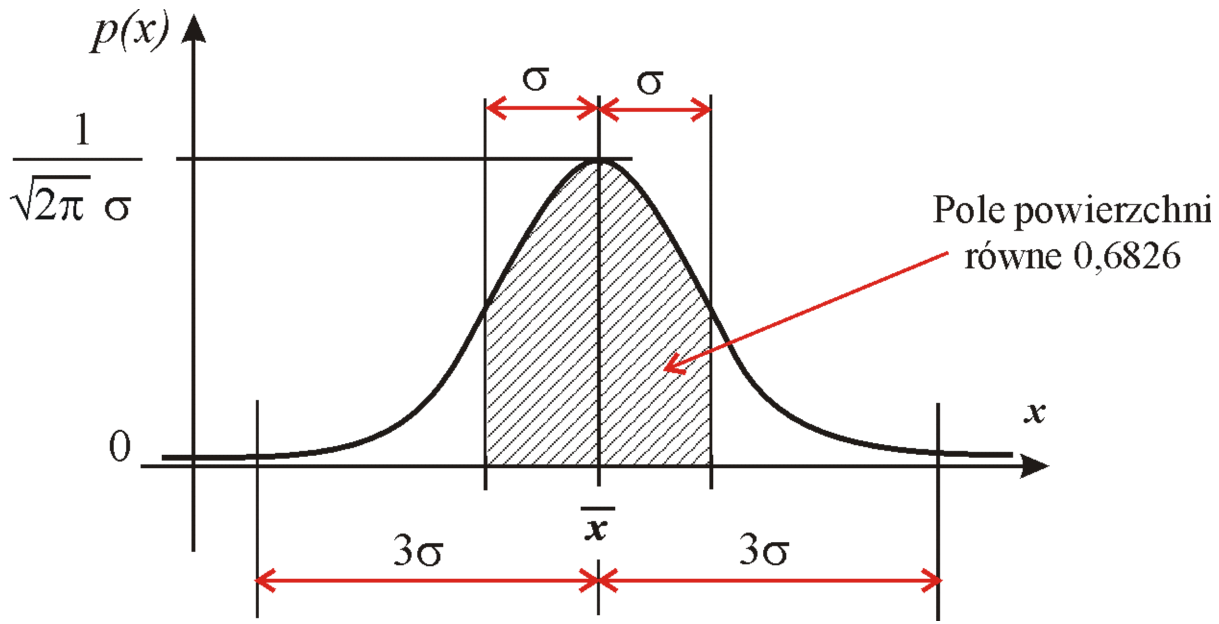
od μ - 3σ do μ + 3σ jest równe 99,74 %.

Ten przedział wartości nazywamy **przedziałem ufności**

To prawdopodobieństwo nazywamy **poziomem ufności**

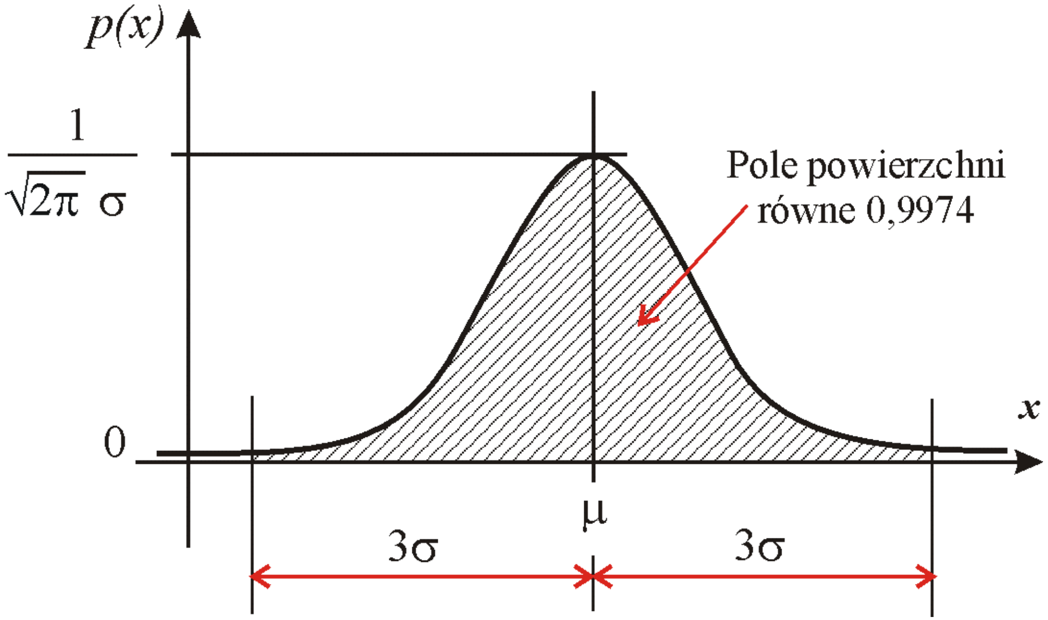
Dla rozkładu normalnego, dla **przedziału ufności** o szerokości **± 3σ** **poziom ufności** jest równy **99,74 %** (czyli prawie 100%).

Rozkład normalny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa



$$\Pr\left(\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma\right) = 68{,}26\%$$

Rozkład normalny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa



$$\Pr\left(\bar{x} - 3\sigma < x < \bar{x} + 3\sigma\right) = 99.74\%$$

Rozkład równomierny

Często również wykorzystywane są właściwości rozkładu $\boxed{\textbf{równomiernego (prostokątnego)}}$ o szerokości 2*a*, dla którego odchylenie standardowe σ wynosi:

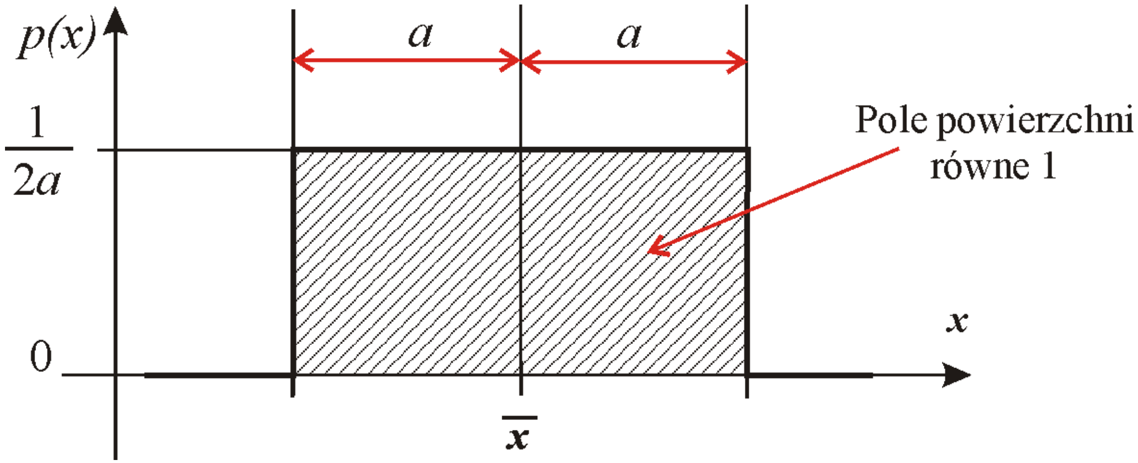
$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Dla rozkładu prostokątnego prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale o szerokości 2*a* wokół wartości oczekiwanej μ jest równe $\boxed{\textbf{100 \%.}}$

Rozkład prostokątny jest stosowany do opisu **błędów kwantowania przetworników A/C** oraz przy szacowaniu **błędów granicznych** przyrządów pomiarowych.

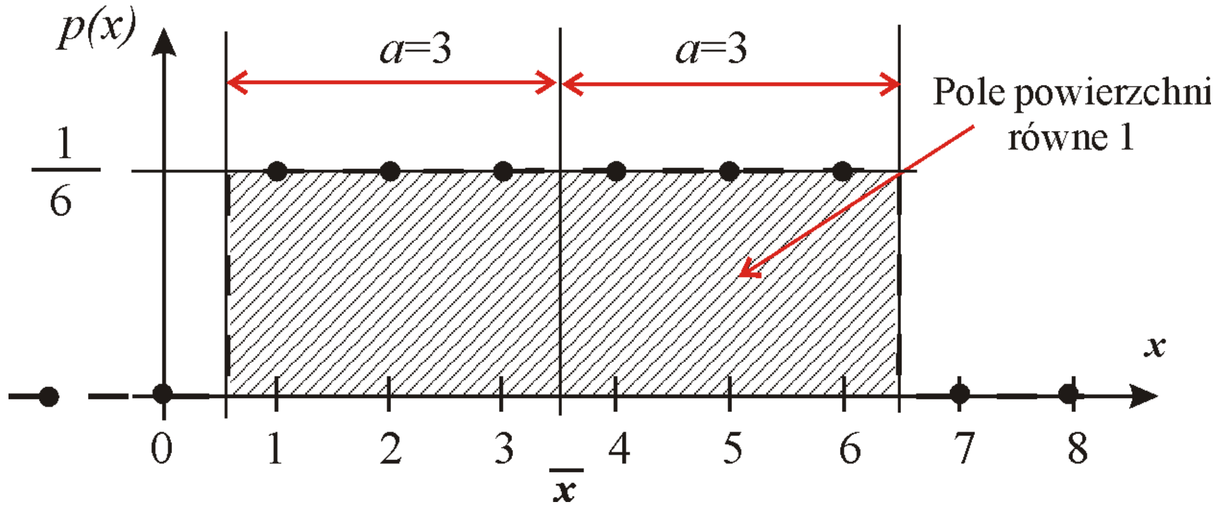
Rozkład równomierny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$\Pr\left(\overline{x} - a < x < \overline{x} + a\right) = 100\%$$



$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Rozkład równomierny – przykład z kostką



$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{6}2\left(0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2\right)} = \sqrt{\frac{0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8{,}75}{3}} = \sqrt{2{,}916666} = \boxed{1{,}70783}$$

Różnica tylko 1,4%

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} = \boxed{1{,}73205}$$

Rozkład trójkątny

Rzadziej wykorzystywane są właściwości rozkładu **trójkątnego** o szerokości 2*a*, dla którego odchylenie standardowe σ wynosi:

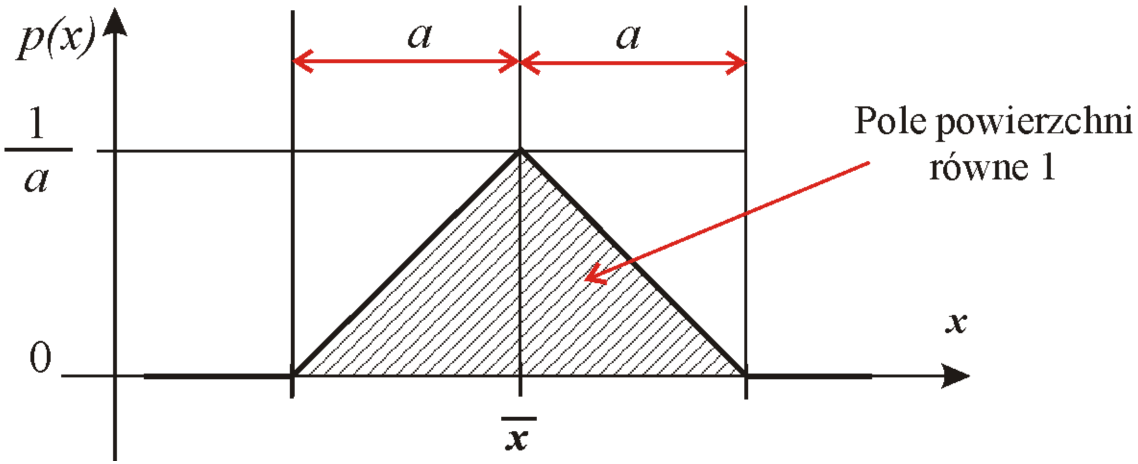
$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Dla rozkładu trójkątnego prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale o szerokości 2*a* wokół wartości oczekiwanej μ jest równe **100 %.**

Rozkład trójkątny jest stosowany do opisu **błędów kwantowania częstościomierzy cyfrowych**.

Rozkład trójkątny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$\Pr\left(\bar{x} - a < x < \bar{x} + a\right) = 100\%$$



$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Rozkłady – podsumowanie

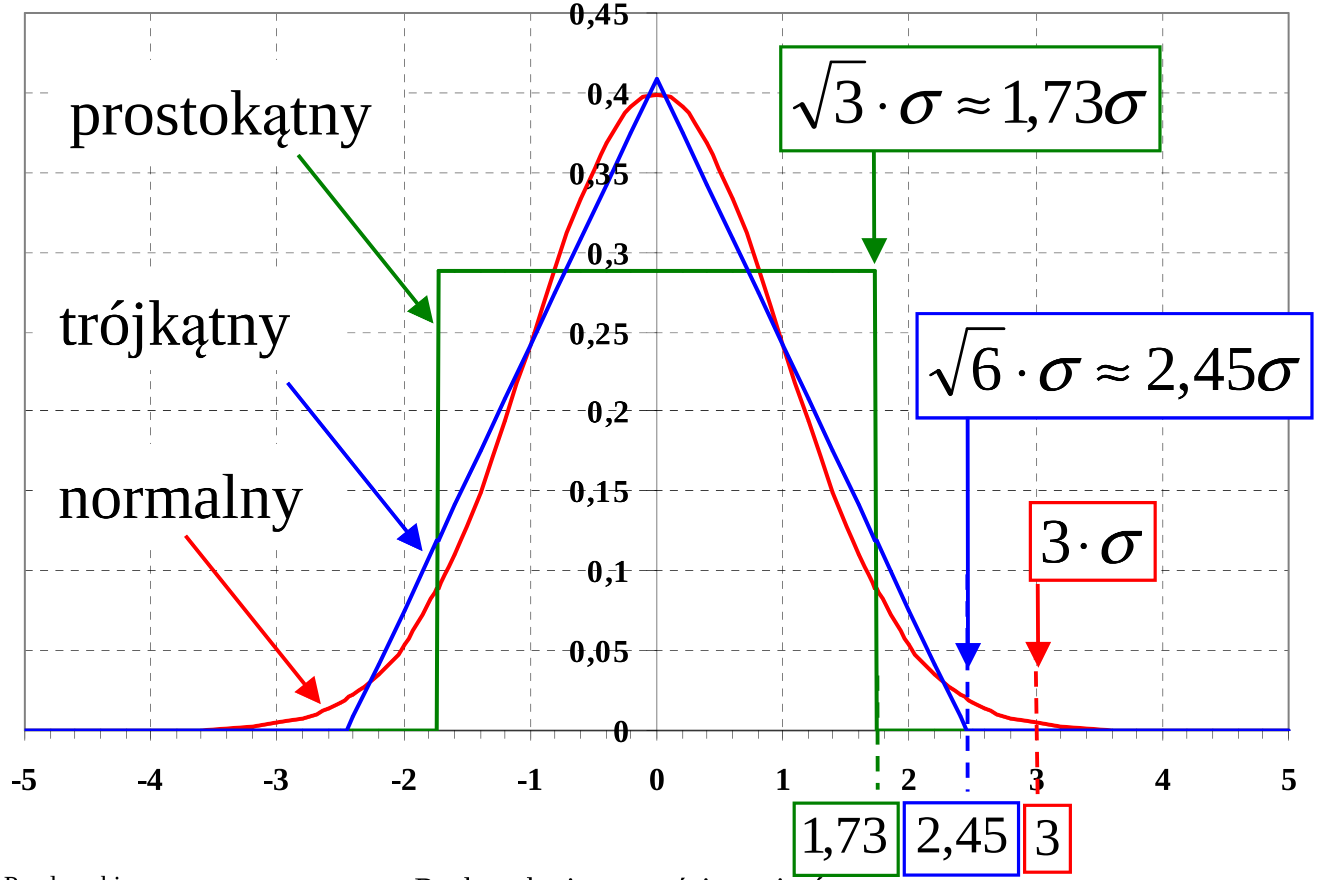
Połowa szerokości przedziału ufności dla różnych rozkładów

Rozkład	Poziom ufności			
	68,27 %	95,45 %	99,74 %	100 %
prostokątny	-	-	-	$\sqrt{3}\cdot\sigma \boxed{\approx 1{,}73\sigma}$
trójkątny	-	-	-	$\sqrt{6}\cdot\sigma \boxed{\approx 2{,}45\sigma}$
normalny	$1\cdot\sigma$	$2\cdot\sigma$	$\boxed{3\cdot\sigma}$	∞

Porównanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa

Przedziały ufności ≈100% dla rozkładów o tych samych parametrach

$$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$$



Centralne twierdzenie graniczne

Jeżeli zmienna losowa x jest sumą wielu zmiennych losowych z_i, to rozkład zmiennej losowej x zbliża się do rozkładu normalnego w miarę zwiększania się liczby sumowanych zmiennych z_i .

Wniosek:

Ponieważ na błąd pomiaru ma wpływ jednocześnie bardzo wiele różnych czynników, których oddziaływania sumują się, dlatego rozkład normalny dobrze opisuje właściwości statystyczne błędów.

Niepewność pomiaru

Niepewność pomiaru *(ang. Uncertainty* [Λn`sə:tntı]*)* jest zdefiniowana jako parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący **rozrzut wartości**, które można w **uzasadniony** sposób przypisać wielkości mierzonej.

Uwagi:

1.Podana definicja jest więc dość ogólna, nieprecyzyjna.

2.W praktyce stosowana jest niepewność standardowa.

Niepewność standardowa zdefiniowana jest jako niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie **odchylenia standardowego**.

Metody obliczania niepewności

Wyróżnia się **dwie metody** obliczania niepewności:

metoda typu **A** i metoda typu **B**.

Metoda typu A jest to metoda obliczania niepewności u_i drogą **analizy statystycznej** serii pojedynczych obserwacji.

Metoda typu B jest to metoda obliczania niepewności u_j sposobami **innymi** niż analiza serii obserwacji.

Zalecane oznaczenia

Niepewność standardowa złożona (łączna, całkowita) u_c jest obliczana jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności składowych, obliczonych odpowiednio metodą A i (lub) B.

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2}$$

Uwaga: poprawnie jest mówić: *„**składanie** niepewności”*, a nie: *„sumowanie niepewności”*.

Inne spotykane określenia:

Suma geometryczna (długość wektora będącego sumą dwóch wektorów prostopadłych do siebie)

ang. Root – sum – of – squares

Niepewność rozszerzona

Niepewność rozszerzona U określa przedział wokół wyniku pomiaru, który obejmuje dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Współczynnik rozszerzenia k jest to współczynnik liczbowy zastosowany jako mnożnik złożonej niepewności standardowej u_c w celu otrzymania niepewności rozszerzonej U.

$$U = k \cdot u_c$$

Współczynnik rozszerzenia

Zwykle wartość współczynnika k przyjmuje się z przedziału

od 2 do 3

tak, aby dla przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa uzyskać założoną szerokość przedziału niepewności z akceptowalnym poziomem ufności.

Najczęściej przyjmuje się:

rozkład normalny (dla długich serii pomiarów),

rozkład t-Studenta (dla krótkich serii) oraz

rozkład prostokątny (wykorzystując **błąd graniczny miernika** podany przez producenta).

Procedura wyznaczania niepewności

Przedstawiona procedura wyznaczania niepewności ma zastosowanie:

dla pomiarów bezpośrednich,

przy dużej liczby pomiarów.

Ocena niepewności pomiarów pośrednich, dla małej liczby pomiarów oraz inne bardziej zaawansowane przypadki są szczegółowo opisane w Przewodniku [6] i Nocie Technicznej [7].

Wyznaczanie niepewności w 5 krokach

Procedura wyznaczania niepewności zawiera się w 5 krokach:

1. wyznaczanie niepewności u_i metodą typu A ,
2. wyznaczanie niepewności u_j metodą typu B ,
3. wyznaczanie niepewności złożonej u_c ,
4. wyznaczanie niepewności rozszerzonej U ,
5. zaokrąglanie wyników obliczeń i podawanie wyniku końcowego.

Krok 1 - wyznaczanie niepewności u_i metodą typu A

W kroku pierwszym wyznaczana jest niepewność u_i metodą typu A na podstawie wyników x_i serii n pomiarów:

odchylenie standardowe pojedynczego wyniku

$$u_i = s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

odchylenie standardowe wartości średniej w serii

pierwiastek z liczby pomiarów n

Krok 2 - wyznaczanie niepewności u_j metodą typu B

W kroku drugim wyznaczana jest niepewność u_j metodą typu B na podstawie:

- danych technicznych przyrządów (np. z klasy dokładności),
- danych dostępnych z literatury (np. rozkład błędów kwantowania),
- z wcześniejszych wyników pomiarów (np. z innego laboratorium).

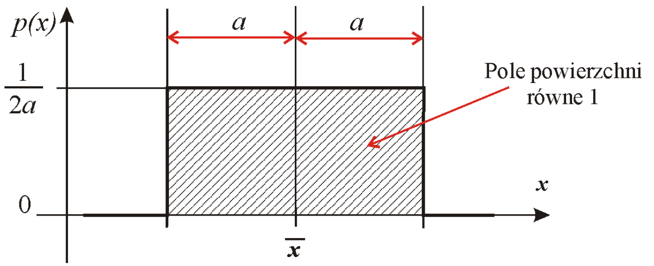
Najczęściej korzystamy z danych technicznych przyrządów, tzn.: z **klasy dokładności** (mierniki analogowe) lub z innego sposobu podawania **błędów granicznych** przyrządu pomiarowego (mierniki cyfrowe)

Krok 2 - wyznaczanie niepewności u_j z klasy miernika

Niepewność pomiaru typu B można określić na podstawie podanego przez producenta **błędu granicznego** miernika.

Ponieważ producent gwarantuje, że 100% błędów miernika jest mniejszych od określonego dla niego błędu granicznego, przyjmuje się **prostokątny rozkład błędów** popełnianych przez miernik, o szerokości **2*a* równej 2Δ_{gr}**.

Uwzględniając znane właściwości rozkładu prostokątnego wyznacza się w takim przypadku niepewność typu B równe odchyleniu standardowemu dla rozkładu prostokątnego:



$$u_j = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}}$$

Krok 2 – obliczanie błędu granicznego Δ_{gr}

Dla mierników analogowych:

Najczęstszy sposób: klasa wyrażona w procentach zakresu

$$\Delta_{gr}\, x = \frac{kl \cdot x_{zak}}{100}$$

Dla mierników cyfrowych:

Pierwszy sposób: *a*% z odczytu (ang. *rdg – reading*) + *b*% z zakresu (ang. *FSR – Full Scale Range*)

$$\Delta_{gr} x = \frac{a \cdot rdg}{100} + \frac{b \cdot FSR}{100}$$

Drugi sposób: *a*% z odczytu (ang. *rdg – reading*) + *b* najmniej znaczących cyfr *d* (ang. *d – digit*)

$$\Delta_{gr} x = \frac{a \cdot rdg}{100} + b \cdot d$$

Krok 3 - wyznaczanie niepewności złożonej u_c

W kroku trzecim wyznaczana jest niepewności złożona (łączna całkowita) u_c według metody „pierwiastek z sumy kwadratów” :

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2}$$

Operację tę nazywamy **składaniem niepewności.**

Krok 4 - wyznaczanie niepewności rozszerzonej U

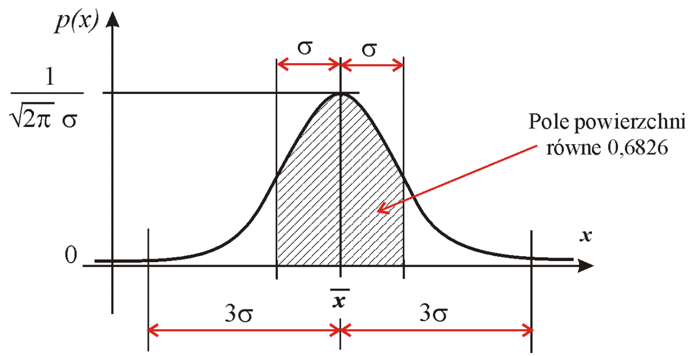
W kroku czwartym wyznaczana jest niepewność rozszerzona U jako iloczyn niepewności całkowitej u_c i współczynnika rozszerzenia k:

$$U = k \cdot u_c$$

Wartość współczynnika k przyjmuje się z zakresu od 2 do 3, zależnie od przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa i zakładanego poziomu ufności. Praktycznie najczęściej przyjmuje się **rozkład normalny**, wtedy:

***k*=2** dla poziomu ufności p=**95,46 %,**

***k*=3** dla poziomu ufności p=**99,74 %.**



Krok 5 - zaokrąglanie obliczeń i podawanie wyniku

W kroku piątym zaokrąglane są wyniki obliczeń i podawany jest końcowy wynik pomiaru wraz z niepewnością.

Podstawowa zasada: Liczba cyfr znaczących zapisanych w wyniku pomiaru powinna odpowiadać jego **rzeczywistej dokładności**.

Często popełnianym **błędem jest** podawanie wyników pomiarów oraz ich niepewności **zbyt dokładnie**, tzn. z nadmierną liczbą cyfr znaczących.

Krok 5 – zalecenia przy obliczaniu i zaokrąglaniu wyników

1.**Niepewności** (błędy) obliczamy z trzema cyframi znaczącymi i zaokrąglamy **zawsze w górę** do jednej cyfry znaczącej lub do dwóch cyfr jeśli zaokrąglenie przekraczałoby 20%.

2.**Wynik** pomiaru **obliczamy z taką samą liczbą cyfr** znaczących, jaką posiadają wyniki odczytane z przyrządów pomiarowych, jeśli obliczamy średnią z powyżej 10 pomiarów uwzględniamy **dodatkowo jedną cyfrę** znaczącą i powyżej 100 pomiarów uwzględniamy **dodatkowo dwie cyfry** znaczące.

3.**Wynik** pomiaru **zaokrąglamy do tego samego miejsca**, do którego zaokrąglono wynik obliczeń niepewności, tzn. ostatnia cyfra znacząca w wyniku pomiaru i jego niepewności powinna występować na tej samej pozycji dziesiętnej.

4.Reguła zaokrąglania powinna być **symetryczna**, tzn. średni błąd zaokrąglania powinien dążyć do zera.

Krok 5 – reguła symetrycznego zaokrąglania

Zasady zaokrąglania (zapewniające **symetryczne** zaokrąglanie):

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **mniejsza od 5** to zaokrąglamy **w dół**,

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **większa od 5** to zaokrąglamy **w górę**,

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **równa 5** i następne cyfry z jej prawej strony **nie są zerami** to zaokrąglamy **w górę**,

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **równa 5** i następne cyfry z prawej jej strony **są zerami** to zaokrąglamy **w górę lub w dół** tak, aby ostatnia pozostawiona cyfra była cyfrą **parzystą**.

Krok 5 – przykłady symetrycznego zaokrąglania

W zapisie wyniku obliczeń zaleca się stosowanie odpowiednich przedrostków (kilo-, mega-, mili-, mikro- itp.) i wielokrotności potęgowe (tzw. zapis naukowy) tak, aby niepewnością obarczone były jedynie miejsca dziesiętne i setne.

Przykłady prawidłowego zaokrąglania:

m=(32,55±0,734) g	zaokrąglamy do m=(32,6±0,8) g ,
C=(2453±55) nF	zaokrąglamy do C=(2,45±0,06) μF ,
I=(43,284±1,23) mA	zaokrąglamy do I=(43,3±1,3) mA ,
P=(4250±75) W	zaokrąglamy do P=(4,25±0,08) kW ,
R=(237465±127) Ω	zaokrąglamy do R=(237,46±0,13) kΩ .

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Multimetrem BM859CF wykonano w krótkich odstępach czasu serię 100 pomiarów napięcia baterii 3R12 (częściowo rozładowanej). Multimetr ustawiono na zakres 5.000 00 V (z rozdzielczością 5 $^4/_5$ cyfry). Wyniki przedstawiono w postaci wykresu. Ze względu na wpływ środowiska, zakłóceń, niestałości parametrów woltomierza i innych często nieznanych przyczyn wyniki pomiarów różnią się między sobą, co oznacza występowanie błędów przypadkowych.

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Na podstawie wyników pomiarów obliczono:

- wartość średnią: $\bar{x} = \boxed{3{,}62735}\boxed{02}$ V

- odchylenie standardowe pojedynczego wyniku: $s(x)$=0,0026457 V

- odchylenie standardowe średniej: $s(\bar{x})$=0,00026457 V

Z danych miernika obliczono jego błąd graniczny Δ_{gr}:

$$\Delta_{gr} = 0{,}02\% \cdot 3{,}63\,\mathrm{V} + 2 \cdot 10\,\mu\mathrm{V} = 7{,}26 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V} + 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{V} = \boxed{7{,}46} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}$$

Wartość średnią ze 100 pomiarów obliczono z dokładnością **lepszą** niż rozdzielczość pomiarów (10μV), pozostałe parametry obliczano z trzema cyframi znaczącymi, aby można było je ostatecznie zaokrąglić do dwóch lub jednej cyfry znaczącej.

Wyznaczanie niepewności – błąd graniczny multimetru

USER'S MANUAL BM 857 , BM857CF - BRYMEN

BRYMEN
BRIGHT PEOPLE'S CHOICE

ELECTRICAL SPECIFICATIONS

Accuracy is ±(% reading digits + number of digits) or otherwise specified, at 23°C ± 5°C & less than 75% relative humidity.

True RMS voltage & current accuracies are specified from 5 % to 100 % of range or otherwise specified. Maximum Crest Factor < 5:1 at full scale & < 10:1 at half scale, and with frequency components within the specified frequency bandwidth for non-sinusoidal waveforms.

DC Voltage

RANGE	BM859CF	BM857
	Accuracy	
500.00 mV, 5.0000V, 50.000V	0.02% + 2d	0.03% + 2d
500.00V	0.04%+2d	0.05% + 2d
1000.0V	0.05%+ 2d	0.1%+2d

NMRR: >60dB @ 50/60Hz

CMRR: >120dB @ DC, 50/60Hz, Rs=1kΩ

Input Impedance: 10MΩ, 30pF nominal
(80pF nominal for 500mV range)

Ohms

RANGE	BM859CF	BM857
	Accuracy	
500.00Ω	0.07%+10d	0.1%+6d
5.0000kΩ	0.07%+2d	
50.000kΩ		
500.00kΩ		
5.0000MΩ	0.2%+6d	0.4%+6d
50.000MΩ	2.0%+6d	2.0%+6d

Open Circuit Voltage: < 1.3VDC (< 3VDC for 500Ω range)

$$\boxed{\Delta_{gr}} = \boxed{0{,}02\% \cdot 3{,}63\ \mathrm{V}} + \boxed{2 \cdot 10\ \mu\mathrm{V}}$$

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Obliczenie niepewności:

- niepewność typu A: $u_i = s(\bar{x}) = 0{,}000\boxed{265}$ V

- niepewność typu B:

$$u_j = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} = \frac{7{,}46 \cdot 10^{-4}\ \text{V}}{\sqrt{3}} = \boxed{4{,}31} \cdot 10^{-4}\ \text{V}$$

- niepewność złożona:

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} = \sqrt{0{,}000265^2\,\text{V}^2 + 0{,}000431^2\,\text{V}^2} = 0{,}000\boxed{506}\ \text{V}$$

- niepewność rozszerzona:

$$U = k \cdot u_c = 3 \cdot 0{,}000506\ \text{V} = 0{,}00152\ \text{V} \approx 0{,}0016\ \text{V} = \boxed{1{,}6}\ \text{mV}$$

Niepewność rozszerzoną obliczono zakładając rozkład normalny i poziom ufności 99,7% (współczynnik rozszerzenia k=3).

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Ostatecznie wynik pomiaru napięcia można zapisać następująco:

U=3,6274 V ± 1,6mV gdzie liczba za znakiem ± jest wartością niepewności rozszerzonej obliczonej dla współczynnika rozszerzenia k=3 opartego na rozkładzie normalnym i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na 99,7%

Należy zwrócić uwagę na zapisanie wyniku pomiaru tak aby wynik i jego niepewność były ze sobą **zgodne pod względem liczby cyfr** znaczących.

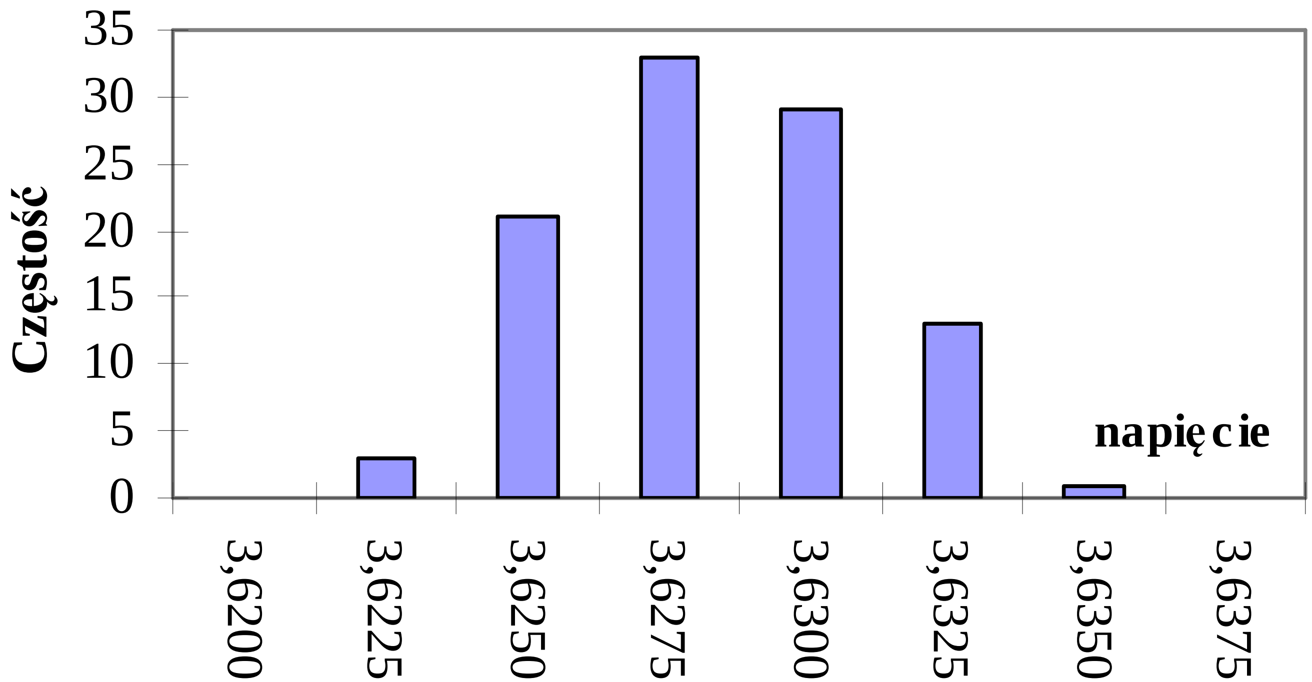
U=3,6274 V

0,0016 V = 1,6mV

Niepewność podano z **dwoma** cyframi znaczącymi, aby uniknąć zbyt dużego zaokrąglenia powyżej 20 %.

Wyznaczanie niepewności – histogram

Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu.



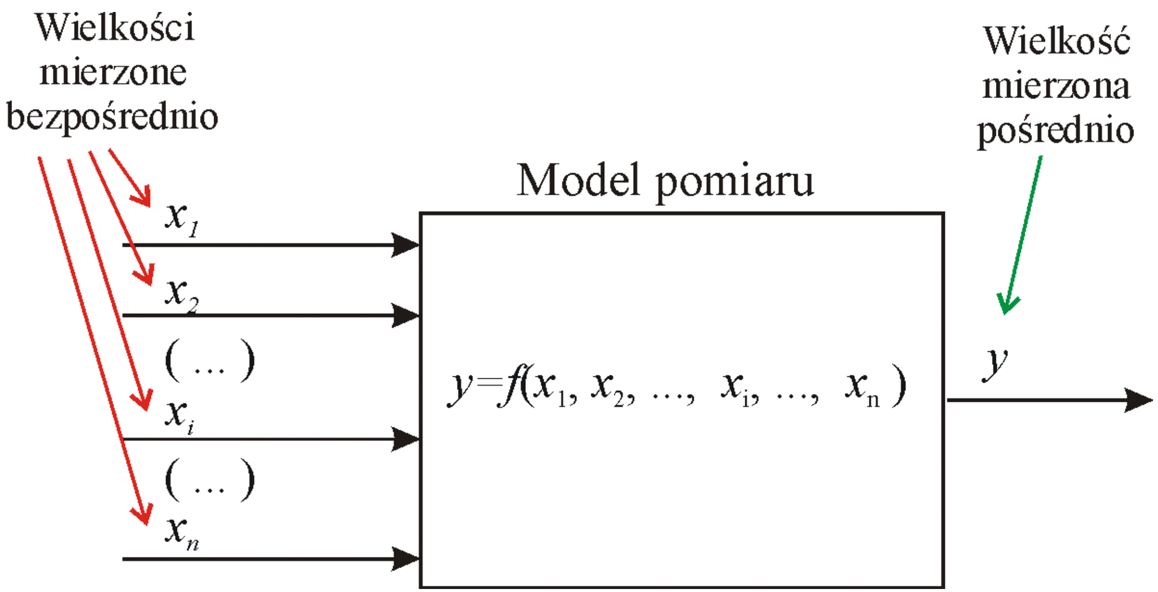
Pomiary pośrednie – równanie pomiaru

Pomiar pośredni polega na obliczeniu wartości wielkości mierzonej ***y*** na podstawie wyznaczonych w pomiarach bezpośrednich wartości wielkości $\boldsymbol{x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n}$:

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n\right)$$

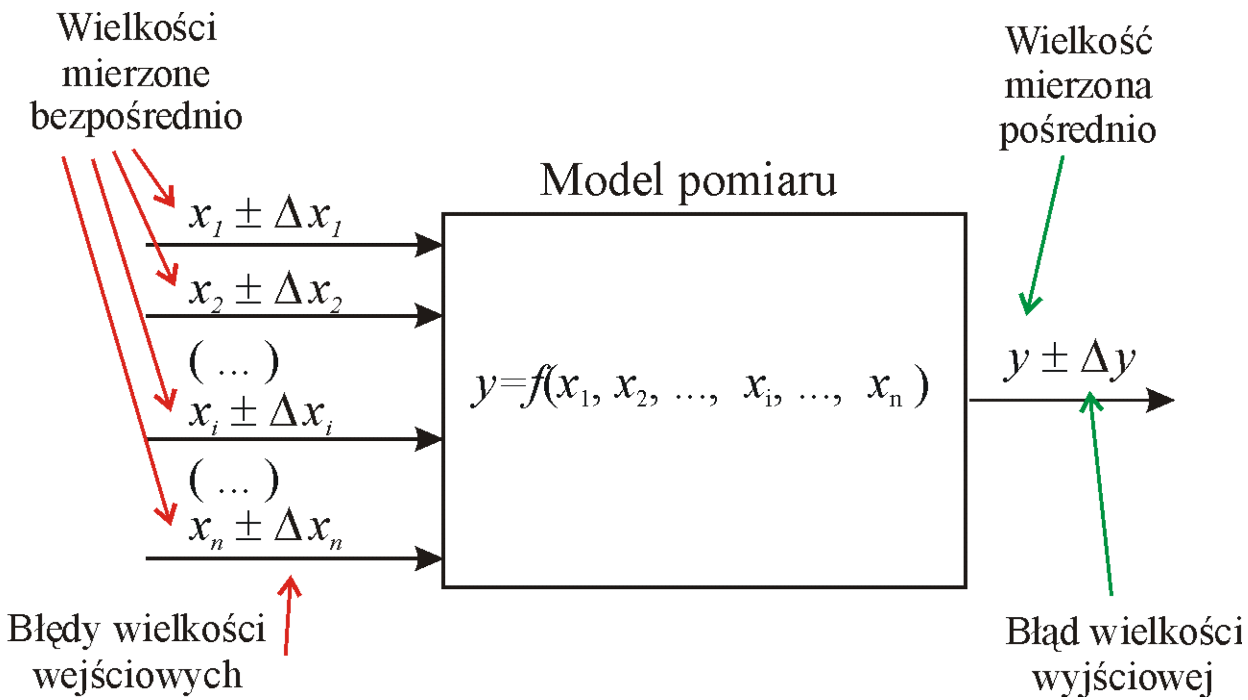
Równanie powyższe nazywamy **równaniem pomiaru**, a funkcję ***f*** nazywamy **funkcją pomiarową**. Równanie pomiaru jest matematycznym **modelem pomiaru**.

Pomiary pośrednie – model pomiaru



Problem: jak błędy wielkości $\boldsymbol{x_i}$ mierzonych bezpośrednio przenoszą się na wielkość $\boldsymbol{y}$ mierzoną pośrednio ?

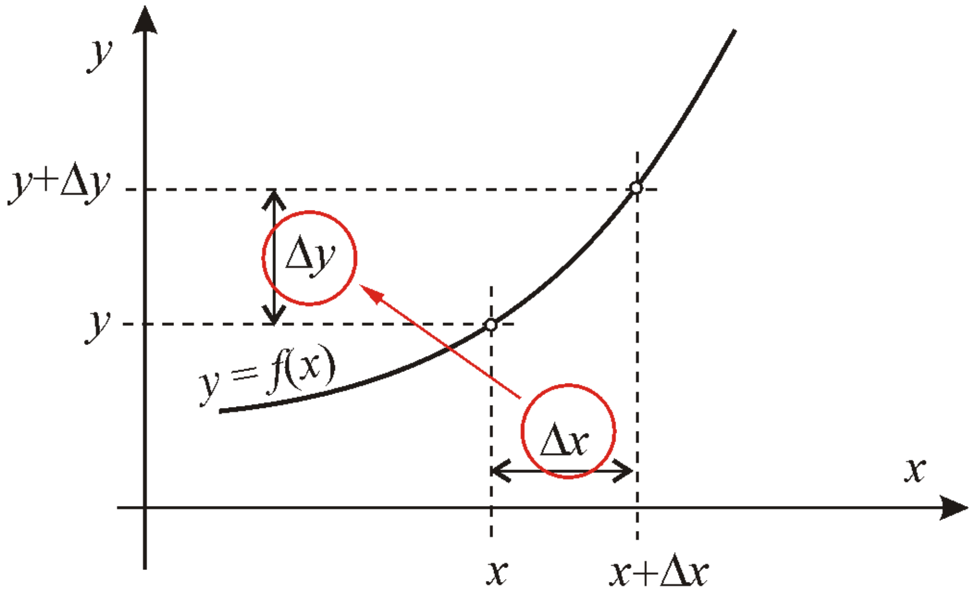
Pomiary pośrednie –błędy



Wniosek: należy błędy Δx_i wielkości mierzonych bezpośrednio przeliczyć na błąd Δy wielkości mierzonej pośrednio.

Błędy w pomiarach pośrednich

Przykład dla funkcji jednej zmiennej



$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)$$

W praktyce błędy w pomiarach pośrednich wyznaczamy metodą wykorzystującą pojęcie **różniczki zupełnej funkcji**.

Błędy w pomiarach pośrednich – podstawy matematyczne

Różniczką zupełną funkcji wielu zmiennych $y=f\ (x_1,\ x_2\ ...\ x_i\ ...\ x_n)$ nazywamy **sumę postaci**:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

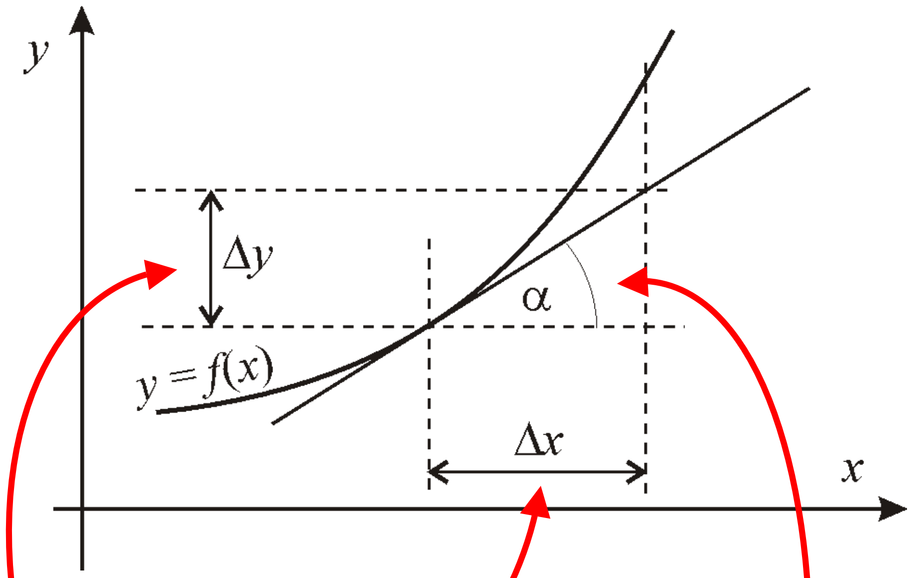
Interpretacja geometryczna dla funkcji jednej zmiennej $y=f\ (x)$:

$$\Delta y = \frac{df}{dx}\Delta x$$, przy czym:

$$\frac{df}{dx} = tg\alpha$$

gdzie kąt α jest nachyleniem stycznej do funkcji $y=f\ (x)$

Podstawy matematyczne – różniczka zupełna



$$\boxed{\Delta y} = \frac{df}{dx}\boxed{\Delta x} \qquad \frac{df}{dx} = tg\boxed{\alpha}$$

Błędy w pomiarach pośrednich – dwa przypadki

Wyznaczanie błędów systematycznych w pomiarach pośrednich ma miejsce w sytuacji, gdy znamy błędy systematyczne wielkości x_1, x_2 ... x_i ... x_n zmierzonych bezpośrednio i chcemy wyznaczyć błąd systematyczny wielkości mierzonej pośrednio, np. w celu wyznaczenia poprawki.

Wyznaczanie błędów granicznych w pomiarach pośrednich ma miejsce w sytuacji, gdy znamy błędy graniczne wielkości x_1, x_2 ... x_i ... x_n zmierzonych bezpośrednio (np. z klasy mierników) i chcemy wyznaczyć błąd graniczny wielkości mierzonej pośrednio.

Błędy systematyczne w pomiarach pośrednich

Błąd systematyczny w pomiarach pośrednich liczymy metodą różniczki zupełnej na podstawie błędów systematycznych wielkości zmierzonych bezpośrednio, **z uwzględnieniem znaków pochodnej i znaków błędów**:

$$\Delta_S y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_S x_i$$ gdzie:

$\Delta_S y$ jest błędem systematycznym w pomiarze pośrednim,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji pomiarowej,

$\Delta_S x_i$ są błędami systematycznymi w pomiarach bezpośrednich.

Błędy graniczne w pomiarach pośrednich

Błąd graniczny w pomiarach pośrednich liczymy metodą różniczki zupełnej na podstawie błędów granicznych wielkości zmierzonych bezpośrednio, **bez uwzględniania znaków** (sumując moduły – przewidujemy najbardziej niekorzystny przypadek):

$$\Delta_{gr} y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{gr} x_i \right| \quad \text{gdzie:}$$

$\Delta_{gr} y$ jest błędem granicznym w pomiarze pośrednim,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji pomiarowej,

$\Delta_{gr} x_i$ są błędami granicznymi w pomiarach bezpośrednich.

Błędy graniczne w pomiarach pośrednich - przykład

Obliczmy błąd graniczny w pomiarze pośrednim energii elektrycznej ***A*** wydzielonej na rezystancji ***R*** w czasie ***t***.

Równanie pomiaru ma postać:

$$A = I^2 R t$$

Znaki mnożenia zbędne, tylko dla zwiększenia czytelności liczenia pochodnej

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial A}{\partial I} = 2I \cdot Rt \qquad \frac{\partial A}{\partial R} = 1 \cdot I^2 t \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = 1 \cdot I^2 R$$

Błąd graniczny pomiaru energii ***A*** :

$$\Delta_{gr} A = \left|2IRt\Delta_{gr} I\right| + \left|I^2 t \Delta_{gr} R\right| + \left|I^2 R \Delta_{gr} t\right|$$

Błędy graniczne względne w pomiarach pośrednich – przykład

Zazwyczaj ostatecznie liczymy błąd graniczny względny. Przy pomiarze pośrednim energii elektrycznej ***A*** wydzielonej na rezystancji ***R*** będzie miał on ma postać:

$$\delta_{gr} A = \frac{\Delta_{gr} A}{A} = \frac{\Delta_{gr} A}{I^2 R t}$$

Po przekształceniach otrzymamy:

$$\delta_{gr} A = \left| 2 \frac{\Delta_{gr} I}{I} \right| + \left| \frac{\Delta_{gr} R}{R} \right| + \left| \frac{\Delta_{gr} t}{t} \right|$$

Czyli: $$\delta_{gr} A = \left| 2 \delta_{gr} I \right| + \left| \delta_{gr} R \right| + \left| \delta_{gr} t \right|$$

Błędy graniczne względne w pomiarach pośrednich – ogólnie

Uogólniając, można wykazać, że jeśli równanie pomiaru jest w postaci **iloczynu potęg wielkości mierzonych** (bardzo częsty przypadek) :

$$y = k\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\, x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$$

to

błąd graniczny pomiaru pośredniego można policzyć jako:

$$\delta_{gr} y = \left|a_1 \delta_{gr} x_1\right| + \left|a_2 \delta_{gr} x_2\right| + \left|a_3 \delta_{gr} x_3\right| + \dots + \left|a_n \delta_{gr} x_n\right|$$

Uwaga: wykładniki potęg a_1, a_2, ... a_n mogą być dowolne: dodatnie, ujemne, całkowite, ułamkowe ...

Przykład c.d. – pomiar energii ***A*** inaczej

Przy pomiarze pośrednim energii elektrycznej ***A*** wydzielonej na rezystancji ***R*** w czasie ***t*** równanie pomiaru ma postać:

$$A = 1 \cdot I^{2} R^{1} t^{1}$$

A więc **możemy od razu zapisać wzór końcowy** na względny błąd pomiaru pośredniego:

$$\delta_{gr} A = \left|2 \cdot \delta_{gr} I\right| + \left|1 \cdot \delta_{gr} R\right| + \left|1 \cdot \delta_{gr} t\right|$$

czyli:

$$\delta_{gr} A = \left|2\delta_{gr} I\right| + \left|\delta_{gr} R\right| + \left|\delta_{gr} t\right|$$

Błędy graniczne w pomiarach pośrednich - inaczej

Sumując moduły błędów, bez uwzględniania znaków, przewidujemy najbardziej niekorzystny przypadek i otrzymujemy zawyżone wartości. Bardziej realne wyniki otrzymujemy stosując **sumowanie geometryczne** (pierwiastek z sumy kwadratów):

$$\Delta_{gr} y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{gr} x_i \right)^2}$$

Wyznaczanie niepewności w pomiarach pośrednich

Przy pomiarze pośrednim wielkości $\boldsymbol{y}$ wyznaczanej na podstawie wartości wielkości $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ ... $\boldsymbol{x_i}$ ... $\boldsymbol{x_n}$ otrzymanych w pomiarach bezpośrednich, według równania pomiaru:

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n\right)$$

obliczamy niepewność pomiaru modyfikując wyznaczanie niepewności łącznej (całkowitej) u_c **w kroku trzecim**.

Wyznaczanie niepewności w 5 krokach - przypomnienie

Procedura wyznaczania niepewności zawiera się w 5 krokach:

1. wyznaczanie niepewności u_i metodą typu A ,
2. wyznaczanie niepewności u_j metodą typu B ,
3. **wyznaczanie niepewności złożonej (łącznej) u_c ,**
4. wyznaczanie niepewności rozszerzonej U ,
5. zaokrąglanie wyników obliczeń i podawanie wyniku końcowego.

Krok 3 - wyznaczanie niepewności złożonej u_c

W kroku trzecim wyznaczana jest niepewność złożona (łączna, całkowita) u_c według metody „pierwiastek z sumy kwadratów" :

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

jeśli wielkości $\boldsymbol{x_i}$ nie są ze sobą skorelowane (są od siebie niezależne).

Jeśli wielkości $\boldsymbol{x_i}$ są ze sobą skorelowane to należy w sumowaniu uwzględnić odpowiednie **kowariancje**.

Krok 3 – uwzględnienie kowariancji

Jeśli wielkości $\boldsymbol{x_i}$ są ze sobą skorelowane to należy w sumowaniu uwzględnić odpowiednie **kowariancje $\boldsymbol{u(x_i\, x_j)}$:**

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i x_j)}$$

Kowariancję $\boldsymbol{u(x_i\, x_j)}$ liczymy według wzoru:

$$u(x_i x_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$$

Podsumowanie

1. Człowiek poznaje otaczającą go rzeczywistość poprzez wzajemne, jedno i dwukierunkowe oddziaływanie z nią.
2. Kolejnymi etapami zdobywania wiedzy są: spostrzeganie, obserwacja, eksperyment, pomiar.
3. Obiekt pomiaru jest zbiorem cech rozróżnialnych jakościowo. Cechy które można wyrazić ilościowo nazywamy wielkościami i one podlegają pomiarowi.
4. Pomiar wyznacza wartość wielkości w postaci liczby i jednostki miary.
5. Pojęcia pomiar, wynik pomiaru, wielkość mierzona (mezurand), system pomiarowy ulegają ciągłej ewolucji i rozszerzaniu.

Podsumowanie c.d.

1. Wynik pomiaru jest zawsze niedokładny.
2. Miarą niedokładności pomiaru jest błąd lub niepewność.
3. Definiuje się bardzo dużo różnych rodzajów błędów .
4. Błąd graniczny pozwala wprowadzić pojęcie klasy przyrządu pomiarowego.
5. Rozróżnienie błędów addytywnych i multiplikatywnych skutkuje różnymi sposobami określania klasy i jej oznaczania.
6. Określenie klasy przyrządów cyfrowych wymaga podania dwóch składników.

Podsumowanie c.d.

1. Przy obliczaniu niepewności mają zastosowanie metody statystyczne
2. Niepewność jest parametrem charakteryzującym rozrzut wartości
3. Niepewności obliczamy metodą A i (lub) metodą B
4. Procedura obliczania niepewności obejmuje 5 kroków
5. Wynik pomiaru podajemy wraz z niepewnością rozszerzoną
6. Ważnym zagadnieniem jest odpowiednie zaokrąglanie wyników
7. Rozrzut wyników możne przedstawić graficznie na histogramie
8. Błędy i niepewności w pomiarach pośrednich wyznacza się metodą różniczki zupełnej na podstawie równania pomiaru

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ