

## ĆWICZENIE NR 34

## POMIARY WIELOKROTNE

(opracował Eligiusz Pawłowski)

## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z możliwościami realizacji pomiarów wielokrotnych za pomocą multimetru cyfrowego sprzęgniętego z komputerem osobistym oraz zastosowaniem w praktyce podstawowych algorytmów matematycznej obróbki wyników pomiarów w celu wyznaczenia wybranych parametrów statystycznych z serii pomiarów.

## 2. Wprowadzenie

Pomiary wielokrotne są często realizowane w celu otrzymania serii wyników opisujących badane zjawisko lub obiekt. Najczęściej spotykamy się z następującymi sytuacjami:

a) mierzona wielkość jest stała w czasie pomiarów, ale z powodu przypadkowych i niemożliwych do określenia zmian właściwości badanego obiektu, parametrów przyrządów pomiarowych i wpływu otoczenia kolejne wyniki pomiarów różnią się między sobą (np. pomiar napięcia ogniwa, pomiar rezystancji opornika). Celem pomiarów w takim przypadku jest oszacowanie błędów przypadkowych i określenie niepewności wyniku pomiaru,

b) mierzona wielkość nie jest stała w czasie i zmienia się w sposób przypadkowy. Celem pomiarów jest wyznaczenie parametrów statystycznych obserwowanej wielkości, takich jak wartość średnia, odchylenie standardowe, wartości graniczne (np. ocena jakości dostarczanej energii elektrycznej poprzez wielokrotny pomiar napięcia skutecznego w sieci energetycznej w ustalonym przedziale czasu),

c) mierzona wielkość nie jest stała i zmienia się według pewnej zależności funkcyjnej, która może być funkcją czasu lub innych zmiennych, również podlegających pomiarowi. Celem pomiarów jest wyznaczenie parametrów funkcji opisującej badaną zależność (np. wyznaczanie charakterystyki prądowo – napięciowej diody),

d) mierzone są parametry wielu obiektów tego samego rodzaju różniących się w sposób przypadkowy między sobą. Celem pomiarów jest oszacowanie parametrów całej populacji obiektów na podstawie pomiarów dla badanej próby (np. pomiar na linii produkcyjnej rezystancji wybranej partii oporników z całej ich serii).

Pomimo różnych celów wykonywania serii pomiarów, stosowane algorytmy przetwarzania danych pomiarowych wykorzystują te same metody statystyki matematycznej. Podstawowe zagadnienia przystępnie są przedstawione w dostępnych publikacjach [3, 8]. Ze względu na stosowanie w literaturze różnych symboli i oznaczeń, w instrukcji zostaną omówione najważniejsze terminy i pojęcia statystyczne w formie określonej w normie ISO [2], a niezbędne podstawowe terminy metrologiczne objaśnione będą na podstawie Słownika [4] i Polskiej Normy [5] (ważniejsze definiowane pojęcia wyróżniono tłustym drukiem). Procedura wyznaczania niepewności pomiaru przedstawiona jest na podstawie Przewodnika [9] i Noty [1].

### 2.1. Podstawowe terminy i pojęcia statystyczne [2]

**Zmienna losowa** jest to zmienna (ciągła lub dyskretna), która może przybierać dowolne wartości z określonego zbioru i z którą związany jest rozkład prawdopodobieństwa. **Rozkład prawdopodobieństwa** jest funkcją określającą prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmie daną wartość, lub wartość należącą do danego zbioru wartości. **Dystrybuanta** jest to

funkcja  $F$  określająca dla każdej wartości  $x$  prawdopodobieństwo, że zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość mniejszą lub równą  $x$ :

$$F(x) = \Pr(X \leq x) . \quad (1)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  (dla zmiennej losowej ciągłej  $X$ ) jest to pochodna (jeśli istnieje) dystrybuanty:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) . \quad (2)$$

Funkcja prawdopodobieństwa (dla zmiennej dyskretnej) określa, dla każdej wartości  $x_i$  zmiennej  $X$ , prawdopodobieństwo  $p_i$ , że zmienna dyskretna przyjmie wartość  $x_i$ :

$$p_i = \Pr(X = x_i) . \quad (3)$$

Parametrem rozkładu jest wielkość używana do opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej. **Wartość oczekiwana**  $\mu$  jest parametrem rozkładu określonym następująco:

- dla zmiennej losowej dyskretnej  $X$  przyjmującej wartości  $x_i$  z prawdopodobieństwem  $p_i$  wartość oczekiwana  $\mu$ , jeśli istnieje, jest równa:

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i , \quad (4)$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie wartości  $x_i$  zmiennej  $X$ ,

- dla zmiennej losowej ciągłej  $X$  o funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  wartość oczekiwana  $\mu$ , jeśli istnieje, jest równa:

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx , \quad (5)$$

gdzie całkowanie rozciąga się na cały przedział zmienności  $X$ .

Zmienna losowa centrowana jest to zmienna, której wartość oczekiwana jest równa zero. Jeśli zmienna losowa  $X$  ma wartość oczekiwaną  $\mu$  to odpowiadająca jej zmienna losowa centrowana jest równa  $(X-\mu)$ . **Wariancja**  $\sigma^2$  jest to wartość oczekiwana kwadratu zmiennej losowej centrowanej:

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} . \quad (6)$$

**Odchylenie standardowe**  $\sigma$  jest dodatnim pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} . \quad (7)$$

Tak określone parametry rozkładów są określone dla całej populacji, czyli dla ogółu jednostek podlegających obserwacjom. W praktyce liczba obserwacji jest ograniczona do pewnej skończonej wartości, czyli z całej populacji pobierana i analizowana jest próba obejmująca tylko część populacji.

**Statystyka** jest to funkcja zmiennych losowych w próbie, sama również jest zmienną losową. **Estymacja** jest to operacja mająca na celu przypisanie wartości liczbowych parametrom rozkładu wybranego jako model statystyczny populacji, na podstawie obserwacji tworzących próbę pobraną z tej populacji. **Estymator** jest to statystyka stosowana do estymacji parametru populacji.

Najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej  $\mu$  dla populacji na podstawie  $n$  - elementowej próby  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jest wartość średnia  $\bar{x}$  :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} . \quad (8)$$

Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego  $\sigma$  dla populacji jest odchylenie standardowe z próby  $s$ :

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (9)$$

Wartość średnia  $\bar{x}$  jest również zmienna losowa. Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego dla wartości średniej jest:

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} . \quad (10)$$

Jak widać ze wzoru (10) odchylenie standardowe średniej z  $n$  pomiarów jest  $\sqrt{n}$  razy mniejsze od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru. To stwierdzenie uzasadnia wykonywanie serii pomiarów, dzięki czemu możliwe jest polepszenie dokładności wyniku. Kolejność postępowania jest następująca:

- wykonujemy serię  $n$  pomiarów mając na uwadze, że zgodnie z (10) dokładność polepsza się  $\sqrt{n}$  razy, a więc zwiększanie liczby pomiarów na początku daje duże korzyści, ale dla dużych wartości  $n$  kolejne pomiary dają już coraz mniejszy efekt,
- za wynik pomiaru przyjmujemy wartość średnią według zależności (8),
- na podstawie odchylenia standardowego wartości średniej wyznaczonej według zależności (10) szacujemy niepewność uzyskanego wyniku pomiaru, co będzie przedstawione w dalszej części instrukcji.

Podczas opracowywania wyników pomiarów najczęściej przydatny jest rozkład normalny, dla którego funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest określona wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 . \quad (11)$$

Prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale:

- od  $\mu - \sigma$  do  $\mu + \sigma$  jest równe 68,2 %,
- od  $\mu - 2\sigma$  do  $\mu + 2\sigma$  jest równe 95,6 %,
- od  $\mu - 3\sigma$  do  $\mu + 3\sigma$  jest równe 99,7 %.

Często również wykorzystywane są właściwości rozkładu równomiernego (prostokątnego) o szerokości  $2a$ , dla którego odchylenie standardowe  $\sigma$  wynosi:

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} . \quad (12)$$

Dla rozkładu prostokątnego prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale o szerokości  $2a$  wokół wartości oczekiwanej  $\mu$  jest równe 100 %. Rozkład prostokątny jest stosowany do opisu błędów kwantowania oraz przy szacowaniu błędów granicznych przyrządów pomiarowych.

Parametry obserwacji z próby wygodnie jest również przedstawić w postaci histogramu, którego kształt zbliża się do kształtu rozkładu w populacji. Histogram z danych eksperymentalnych opracowuje się obliczając częstość występowania wyników o wartościach należących do określonych przedziałów o równej szerokości. Histogram musi obejmować wszystkie wartości, a liczbę przedziałów wybiera się tak, aby można było ocenić kształt rozkładu. Przykładowe histogramy przedstawiają Rys.3.2, Rys.3.4, Rys.3.6 oraz Rys.3.8.

## 2.2. Dokładność pomiaru, błąd i niepewność [4, 5]

**Wynik pomiaru** jest to wartość wielkości mierzonej, uzyskana drogą pomiaru. Wykonując pomiar oczekujemy, że otrzymamy dokładne wyniki. W rzeczywistości jednak wyniki pomiarów tylko w przybliżeniu są zgodne z wartością prawdziwą, dodatkowo okazuje się, że

przy pomiarach wielokrotnych otrzymujemy różne wyniki z różnym prawdopodobieństwem, co oznacza że wynik pomiaru jest zmienną losową.

**Dokładność** (*accuracy*) pomiaru jest to stopień zgodności wyniku pomiaru z wartością prawdziwą (rzeczywistą) wielkości mierzonej, dokładność przyrządu pomiarowego jest zdefiniowana jako zdolność dawania odpowiedzi bliskich wartości prawdziwej. W obu przypadkach pojęcie dokładność ma charakter jakościowy, a nie ilościowy, tzn. nie można jej wyrażać za pomocą liczby. Nagminnie producenci ze względów reklamowych używają niewłaściwie pojęcia „dokładność” podając w rzeczywistości błędy graniczne przyrządu pomiarowego (przykład w Tab.4.1), dzięki czemu użytkownik ma odnieść wrażenie, że przyrząd jest „dokładny” i nie popełnia błędów. Nie należy również stosować terminu „precyzja” zamiast „dokładność”.

**Precyzja** jest pojęciem ogólnym, określającym stopień zgodności ze sobą wyników kolejnych pomiarów, przy czym rozróżnia się powtarzalność, gdy warunki wykonywania pomiarów nie zmieniają się, oraz odtwarzalność, gdy warunki te zmieniają się.

**Rozdzielczość** przyrządu pomiarowego jest to najmniejsza różnica wskazania urządzenia wskazującego, która może być zauważona w wyraźny sposób. Dla przyrządów analogowych wskazówkowych przyjmuje się rozdzielczość równą 1/5 elementarnej działki na skali przyrządu. Dla mierników cyfrowych rozdzielczość jest równa wartości najmniej znaczącej cyfry na wyświetlaczu. Tak określona rozdzielczość przyrządu cyfrowego jest zależna od zastosowanego zakresu. Dlatego producenci cyfrowych przyrządów pomiarowych zazwyczaj podają rozdzielczość jako liczbę wszystkich możliwych do pokazania wartości. Dla przykładu, rozdzielczość 50 000 jednostek oznacza że na wyświetlaczu może pojawić się dowolna wartość od 0 do 49 999. Inny sposób to podanie liczby cyfr na wyświetlaczu. Podanie cyfry w postaci ułamka oznacza, że na najbardziej znaczącej pozycji wyświetlacza mogą pojawić się tylko niektóre cyfry. Dla przykładu, rozdzielczość  $4\frac{4}{5}$  cyfry oznacza że na czterech pozycjach wyświetlacza może pojawić się dowolna cyfra (od 0 do 9), ale na najbardziej znaczącej pozycji tylko 5 cyfr, z których największa wynosi 4 (tzn. od 0 do 4).

**Czułość** przyrządu pomiarowego jest ilorazem przyrostu odpowiedzi przyrządu pomiarowego (jego wskazania) przez odpowiadający mu przyrost sygnału wejściowego.

Dokładność, precyzja, rozdzielczość i czułość opisują więc różne właściwości przyrządu pomiarowego i należy je wyraźnie rozróżniać. Zazwyczaj, dobrze zaprojektowany przyrząd posiada dużą czułość, wysoką rozdzielczość i precyzję i jest dokładny. Nie jest to jednak regułą, gdyż stosunkowo łatwo jest technicznie osiągnąć wysoką rozdzielczość i dużą czułość, natomiast dużo trudniejsze jest zagwarantowanie odpowiedniej dokładności i precyzji. Z tego względu na rynku dostępnych jest dużo przyrządów o wysokiej rozdzielczości i dużej czułości, w rzeczywistości jednak mało dokładnych i nieprecyzyjnych.

Podając wynik pomiaru należy koniecznie podać również pewną ilościową informację o jakości tego wyniku, tak aby korzystający z tego wyniku mógł oszacować jego wiarygodność. Bez takiej informacji wyniki pomiarów nie mogą być porównywane ani między sobą, ani z wartościami odniesienia podanymi w specyfikacji lub w normie. Pełną informację o jakości pomiaru zawiera błąd pomiaru.

**Błąd pomiaru**  $\Delta_x$  jest to różnica pomiędzy wynikiem pomiaru  $x$  a wartością prawdziwą wielkości mierzonej  $\dot{x}$ :

$$\Delta_x = x - \dot{x} \quad . \quad (13)$$

Niestety wartość tego błędu w praktyce jest nieznaną, gdyż nieznaną jest wartość prawdziwą wielkości mierzonej. W niektórych sytuacjach można się posłużyć wielkością umownie prawdziwą. Wartość umownie prawdziwa (wartość poprawna) jest to wartość wyznaczona z niepewnością akceptowalną w danym zastosowaniu.

Ponieważ wynik pomiaru jest zmienną losową, to również błąd jest zmienną losową, której wartość oczekiwana jest równa zero, a odchylenie standardowe jest miarą niepewności wyniku pomiaru.

Niezbędny jest więc jednolity i powszechnie akceptowany sposób określania jakości wyniku pomiaru. Do niedawna powszechnie stosowano pojęcie błędu granicznego. Producenci podają błąd graniczny w danych technicznych przyrządu pomiarowego. Dla przyrządów analogowych błąd graniczny jest podawany jako klasa przyrządu pomiarowego. Obecnie zalecane jest w tym celu posługiwanie się pojęciem niepewności pomiaru.

**Niepewność pomiaru** (*uncertainty*) jest zdefiniowana [4] jako parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Podana definicja jest więc dość ogólna. W praktyce stosowana jest **niepewność standardowa**, zdefiniowana jako niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego. Wyróżnia się dwie metody obliczania niepewności: typu A i typu B. **Metoda typu A** jest to metoda obliczania niepewności  $u_i$  drogą analizy statystycznej serii pojedynczych obserwacji. **Metoda typu B** jest to metoda obliczania niepewności  $u_i$  sposobami innymi niż analiza serii obserwacji. **Niepewność standardowa złożona** (całkowita)  $u_c$  jest obliczana jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności składowych, obliczonych odpowiednio metodą A i (lub) B. **Niepewność rozszerzona**  $U$  określa przedział wokół wyniku pomiaru, który obejmuje dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. **Współczynnik rozszerzenia**  $k$  jest to współczynnik liczbowy zastosowany jako mnożnik złożonej niepewności standardowej w celu otrzymania niepewności rozszerzonej. Zwykle współczynnik  $k$  przyjmuje się z przedziału od 2 do 3 tak, aby dla przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa uzyskać założoną szerokość przedziału niepewności z akceptowalnym poziomem ufności.

Najczęściej przyjmuje się rozkład normalny (dla długich serii pomiarów), rozkład t-Studenta (dla krótkich serii) oraz rozkład prostokątny (wykorzystując błąd graniczny miernika podany przez producenta).

### 2.3. Wyznaczanie niepewności pomiaru [9, 1]

Na potrzeby ćwiczenia będzie przedstawiona procedura wyznaczania niepewności dla pomiarów bezpośrednich, przy dużej liczbie pomiarów. Ocena niepewności pomiarów pośrednich, dla małej liczby pomiarów oraz inne bardziej zaawansowane przypadki są szczegółowo opisane w Przewodniku [9] i Nocie Technicznej [1].

**Krok 1** – wyznaczanie niepewności  $u_i$  metodą typu A na podstawie wyników  $x_i$  serii  $n$  pomiarów:

$$u_i = s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (14)$$

**Krok 2** – wyznaczanie niepewności  $u_j$  metodą typu B na podstawie:

- danych technicznych przyrządów (np. z klasy),
- danych dostępnych z literatury (np. rozkład błędów kwantowania),
- z wcześniejszych wyników pomiarów.

Częstym przypadkiem jest wyznaczanie niepewności typu B na podstawie błędu granicznego miernika. Pojęcie błędu granicznego jest stosowane przez producentów aparatury pomiarowej do określenia dokładności przyrządów pomiarowych. Dla mierników analogowych powszechnie podaje się klasę dokładności. Liczba będąca wyróżnikiem (oznacznikiem) klasy jest umieszczana na skali miernika i określa dopuszczalny błąd graniczny miernika wyrażony w procentach największego wskazania (zakresu) [4, 5]. Dla niektórych przyrządów określa się klasę w odniesieniu do wartości wskazanej (np. liczniki energii elektrycznej - oznaczenie klasy podaje się w kółeczku) lub do długości łuku podziałki

(np. omomierze szeregowe - oznaczenie klasy z symbolem kąta). Korzystając z klasy można obliczyć błąd graniczny miernika ze wzoru (15):

$$\Delta_{gr} = \frac{\textit{klasa} \cdot \textit{zakres}}{100} \quad (15)$$

Dla multimetrów cyfrowych błąd graniczny jest zazwyczaj podawany jako suma dwóch składników: proporcjonalnego do wartości wskazanej (błąd multiplikatywny) i stałego na danym zakresie pomiarowym (błąd addytywny). Producenci najczęściej podają dwie liczby: „*a*” wyrażającą błąd multiplikatywny w procentach wartości wskazanej oraz „*b*” wyrażającą błąd addytywny jako wielokrotność najmniej znaczącej cyfry „*c*” na wyświetlaczu miernika dla danego zakresu, czyli inaczej mówiąc jako wielokrotność rozdzielczości miernika na danym zakresie. Przykładowe dane techniczne pochodzące z oryginalnej instrukcji obsługi miernika BM859 przedstawia Tab.4.1. Błąd addytywny jest w oryginalnej dokumentacji wyrażany niezbyt zrozumiale jako „liczba cyfr” (patrz opis w Tab. 4.1.). W takich przypadkach błąd graniczny miernika należy obliczyć ze wzoru (16a).

$$\Delta_{gr} = \frac{a \cdot \textit{wskazanie}}{100} + b \cdot c \quad (16a)$$

W miernikach innych producentów, np. Agilent, Escort, błąd graniczny jest podawany również jako suma błęd multiplikatywnego i addytywnego, ale producenci najczęściej podają dwie liczby: „*a*” wyrażającą błąd multiplikatywny w procentach wartości wskazanej i „*b*” wyrażającą błąd addytywny w procentach zakresu. W takich przypadkach błąd graniczny miernika należy obliczyć ze wzoru (16b):

$$\Delta_{gr} = \frac{a \cdot \textit{wskazanie}}{100} + \frac{b \cdot \textit{zakres}}{100} \quad (16b)$$

Na podstawie podanego przez producenta błędu granicznego miernika można określić niepewność pomiaru typu B. Ponieważ producent gwarantuje, że 100% błędów miernika jest mniejszych od określonego dla niego błędu granicznego, przyjmuje się więc prostokątny rozkład błędów popełnianych przez miernik, o szerokości  $2a$  równej  $2\Delta_{gr}$ . Uwzględniając znane właściwości rozkładu prostokątnego (12) wyznacza się w takim przypadku niepewność typu B równe odchyleniu standardowemu dla rozkładu prostokątnego, według wzoru (17) [9]:

$$u_j = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} \quad (17)$$

**Krok 3** – wyznaczanie niepewności łącznej (całkowitej)  $u_c$  według metody „pierwiastek z sumy kwadratów”:

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} \quad (18)$$

**Krok 4** – wyznaczanie niepewności rozszerzonej  $U$  jako iloczynu niepewności całkowitej i współczynnika rozszerzenia  $k$ :

$$U = k \cdot u_c \quad (19)$$

Wartość współczynnika  $k$  przyjmuje się z zakresu od 2 do 3, zależnie od przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa i zakładanego poziomu ufności. Praktycznie najczęściej przyjmuje się rozkład normalny, wtedy:

$$\begin{aligned} k=2 & \text{ dla poziomu ufności } p=95,6 \%, \\ k=3 & \text{ dla poziomu ufności } p=99,7 \%. \end{aligned}$$

**Krok 5** – zaokrąglanie wyników obliczeń i podawanie końcowego wyniku pomiaru wraz z niepewnością. Liczba cyfr znaczących zapisanych w wyniku pomiaru powinna odpowiadać jego rzeczywistej dokładności. Często popełnianym błędem jest podawanie wyników

pomiarów i ich niepewności zbyt dokładnie, tzn. z nadmierną liczbą cyfr znaczących. Należy stosować się do następujących zaleceń:

a) niepewności (błędy) obliczamy z trzema cyframi znaczącymi i zaokrąglamy **zawsze w górę** do jednej cyfry znaczącej lub do dwóch cyfr jeśli zaokrąglenie przekraczałoby 20%,

b) wynik pomiaru obliczamy z liczbą cyfr znaczących taką samą, jaką posiadają wyniki odczytane z przyrządów pomiarowych, jeśli obliczamy średnią z powyżej 10 pomiarów uwzględniamy dodatkowo jedną cyfrę znaczącą i powyżej 100 pomiarów uwzględniamy dodatkowo dwie cyfry znaczące,

c) wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca, do którego zaokrąglono wynik obliczeń niepewności, tzn. ostatnia cyfra znacząca w wyniku pomiaru i jego niepewności powinna występować na tej samej pozycji dziesiętnej,

d) zaokrąglenie wyniku pomiaru przeprowadzamy według ogólnych zasad:

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **mniejsza od 5** to zaokrąglamy **w dół**,
- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **większa od 5** to zaokrąglamy **w górę**,
- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **równa 5** i następne cyfry z jej prawej strony **nie są zerami** to zaokrąglamy **w górę**,
- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **równa 5** i następne cyfry z prawej jej strony **są zerami** to zaokrąglamy **w górę lub w dół** tak, aby ostatnia pozostawiona cyfra była cyfrą **parzystą**.

W zapisie wyniku obliczeń zaleca się stosowanie odpowiednich przedrostków (kilo-, mega-, mili-, mikro- itp.) i wielokrotności potęgowe (tzw. zapis naukowy) tak, aby niepewnością obarczone były jedynie miejsca dziesiętne i setne. Przykładowo:

$m=(32,55\pm 0,734)$ g	zaokrąglamy do	$m=(32,6\pm 0,8)$ g ,
$C=(2453\pm 55)$ nF	zaokrąglamy do	$C=(2,45\pm 0,06)$ $\mu$ F ,
$I=(43,284\pm 1,23)$ mA	zaokrąglamy do	$I=(43,3\pm 1,3)$ mA ,
$P=(4250\pm 75)$ W	zaokrąglamy do	$P=(4,25\pm 0,08)$ kW ,
$R=(237465\pm 127)$ $\Omega$	zaokrąglamy do	$R=(237,46\pm 0,13)$ k $\Omega$ .

### 3. Przykłady

#### 3.1. Pomiar napięcia baterii

Multimetrem BM859CF wykonano w krótkich odstępach czasu serię 100 pomiarów napięcia baterii 3R12 (częściowo rozładowanej). Multimetr ustawiono na zakres 5.000 00 V (z podwyższoną rozdzielczością  $5^{4/5}$  cyfry), parametry miernika zawiera Tab.4.1. Wyniki przedstawiono w postaci wykresu na Rys.3.1. Należy zwrócić uwagę, że kolejne punkty połączono ze sobą odcinkami. Niewłaściwe byłoby rysowanie jakiegokolwiek linii ciągłej sugerującej występowanie zależności funkcyjnej, podczas gdy kolejne wyniki są od siebie niezależne, a ich rozrzut jest przypadkowy. Ze względu na krótki czas wykonywania pomiarów i obciążenie ogniwa znikomym prądem płynącym przez woltomierz można uznać, że siła elektromotoryczna ogniwa jest stała. Jednak ze względu na wpływ środowiska, zakłóceń, niestałości parametrów woltomierza i innych często nieznanych przyczyn wyniki pomiarów różnią się między sobą, co oznacza występowanie błędów przypadkowych.

Na podstawie wyników pomiarów obliczono:

- wartość średnią:  $\bar{x} = 3,6273502$  V
- odchylenie standardowe pojedynczego wyniku:  $s(x) = 0,0026457$  V
- odchylenie standardowe średniej:  $s(\bar{x}) = 0,00026457$  V

Z danych miernika (Tab. 4.1) obliczono jego błąd graniczny  $\Delta_{gr}$  zgodnie ze wzorem (16a):

$$\Delta_{gr} = 0,02\% \cdot 3,63 \text{ V} + 2 \cdot 10 \mu\text{V} = 7,26 \cdot 10^{-4} \text{ V} + 2 \cdot 10^{-5} \text{ V} = 7,46 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

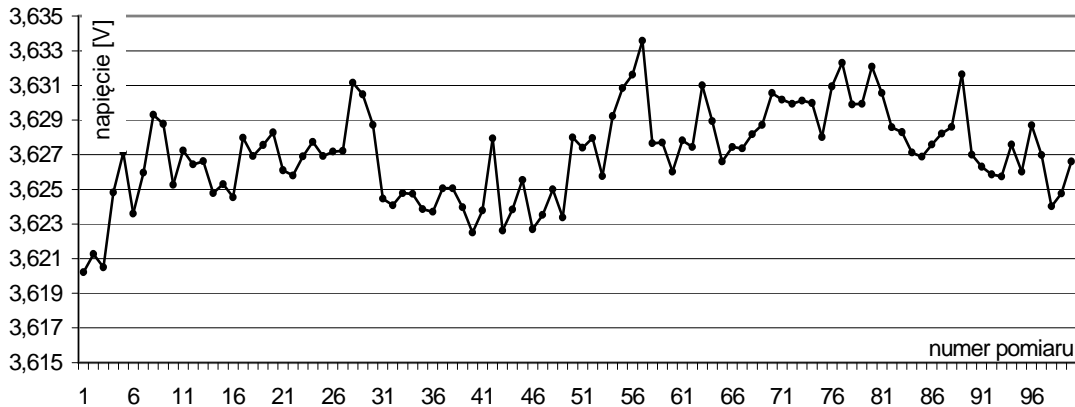
Obliczenie niepewności:

- niepewność typu A:  $u_i = s(\bar{x}) = 0,000265 \text{ V}$

- niepewność typu B:  $u_j = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} = \frac{7,46 \cdot 10^{-4} \text{ V}}{\sqrt{3}} = 4,31 \cdot 10^{-4} \text{ V}$

- niepewność łączna:  $u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} = \sqrt{0,000265^2 \text{ V}^2 + 0,000431^2 \text{ V}^2} = 0,000506 \text{ V}$

- niepewność rozszerzona:  $U = k \cdot u_c = 3 \cdot 0,000506 \text{ V} = 0,00152 \text{ V} \approx 0,0016 \text{ V} = 1,6 \text{ mV}$



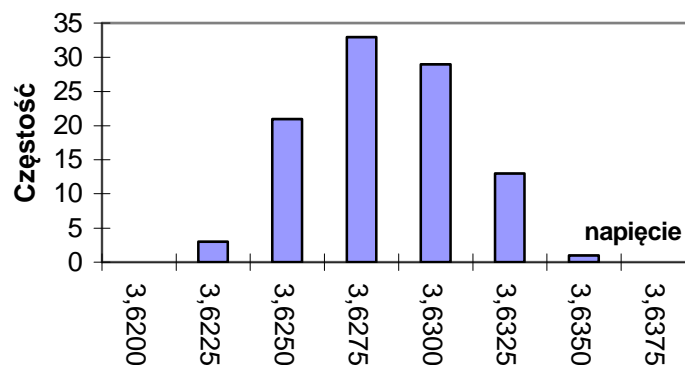
Rys.3.1. Wyniki 100 pomiarów napięcia stałego

Wartość średnią ze 100 pomiarów obliczono z dokładnością lepszą niż rozdzielczość pomiarów ( $10\mu\text{V}$ ), pozostałe parametry obliczano z trzema cyframi znaczącymi, aby można było je ostatecznie zaokrąglić do dwóch lub jednej cyfry znaczącej. Niepewność rozszerzoną obliczono zakładając rozkład normalny i poziom ufności 99,7% (współczynnik rozszerzenia  $k=3$ ). Ostatecznie wynik pomiaru napięcia można zapisać następująco:

$U = 3,6274 \text{ V} \pm 1,6 \text{ mV}$  gdzie liczba za znakiem  $\pm$  jest wartością niepewności rozszerzonej obliczonej dla współczynnika rozszerzenia  $k=3$  opartego na rozkładzie normalnym i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na 99,7%

Należy zwrócić uwagę na zapisanie wyniku pomiaru tak aby wynik i jego niepewność były ze sobą zgodne pod względem liczby cyfr znaczących. Niepewność podano z dwoma cyframi znaczącymi, aby uniknąć zbyt dużego zaokrąglenia powyżej 20 %.

Na Rys.3.2. przedstawiono wyniki pomiarów w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu.

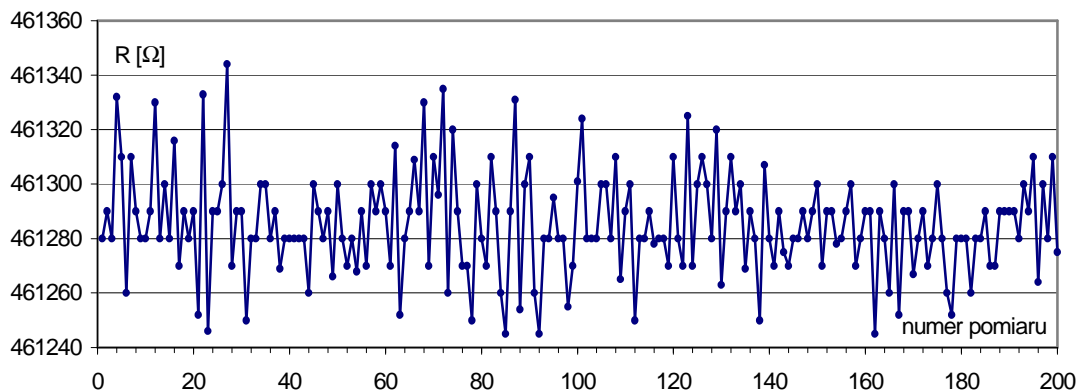


Rys.3.2. Histogram wyników pomiarów napięcia stałego



### 3.2. Pomiar rezystancji pojedynczego opornika

Multimetrem BM859CF wykonano w krótkich odstępach czasu serię 200 pomiarów rezystancji opornika metalizowanego typu MŁT o wartości 470 kΩ i tolerancji ± 10 %. Multimetr ustawiono na zakres 500,00 kΩ (ze standardową rozdzielczością 4<sup>4</sup>/<sub>5</sub> cyfry). Wyniki opracowano analogicznie jak w punkcie 3.1 i przedstawiono w postaci wykresu na Rys.3.3. Kolejne punkty połączono ze sobą odcinkami. Wyniki pomiarów różnią się wyraźnie między sobą, co oznacza występowanie błędów przypadkowych.



Rys.3.3. Wyniki 200 pomiarów rezystancji opornika 470 kΩ ± 10%

Na podstawie wyników pomiarów obliczono:

- wartość średnią:  $\bar{x} = 461285,3 \Omega$
- odchylenie standardowe pojedynczego wyniku:  $s(x) = 18,7127 \Omega \approx 18,7 \Omega$
- odchylenie standardowe średniej:  $s(\bar{x}) = 1,34 \Omega$

Z danych miernika (Tab. 4.1) obliczono jego błąd graniczny  $\Delta_{gr}$  zgodnie ze wzorem (16a):

$$\Delta_{gr} = 0,07\% \cdot 461285,3 \Omega + 2 \cdot 10 \Omega \approx 323 \Omega + 20 \Omega = 343 \Omega$$

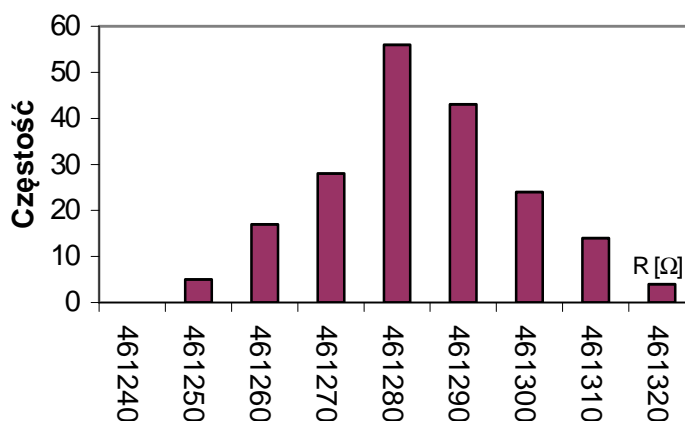
Obliczenie niepewności:

- niepewność typu A:  $u_i = s(\bar{x}) = 1,34 \Omega$
- niepewność typu B:  $u_j = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} = \frac{343 \Omega}{\sqrt{3}} = 198 \Omega$
- niepewność łączna:  $u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} = \sqrt{1,34^2 \Omega^2 + 198^2 \Omega^2} = 198,0045 \Omega \approx 198 \Omega$
- niepewność rozszerzona:  $U = k \cdot u_c = \sqrt{3} \cdot 198 \Omega = 343 \Omega \approx 400 \Omega$

Wartość średnią z 200 pomiarów obliczono z dokładnością lepszą niż rozdzielczość pomiarów (10 Ω), pozostałe parametry obliczano z trzema cyframi znaczącymi, aby można było je ostatecznie zaokrąglić do dwóch lub jednej cyfry znaczącej. Z porównania wartości wynika, że niepewność typu A (1,34 Ω) jest bardzo mała w stosunku do niepewności typu B (198 Ω) wyliczonej z błędu granicznego miernika przy założeniu rozkładu prostokątnego. W związku z tym obliczając niepewność rozszerzoną nieuprawnione byłoby zakładanie rozkładu normalnego, gdyż składnik niepewności  $u_i$  praktycznie nie miał znaczenia. Niepewność rozszerzoną obliczono zakładając rozkład prostokątny i poziom ufności 100 % (współczynnik rozszerzenia  $k=1,73$ ), a więc praktycznie określono błąd graniczny. Ostatecznie wynik pomiaru rezystancji można zapisać następująco:

$R = 461,3 \text{ k}\Omega \pm 0,4 \text{ k}\Omega$  gdzie liczba za znakiem ± jest wartością niepewności rozszerzonej obliczonej dla współczynnika rozszerzenia  $k=1,73$  opartego na rozkładzie prostokątnym i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na 100 %

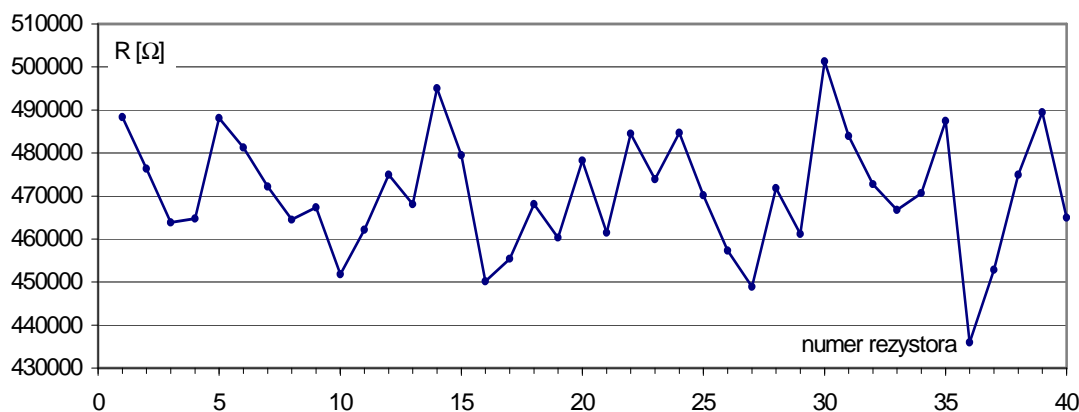
Na Rys.3.4. przedstawiono wyniki pomiarów w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu.



Rys.3.4. Histogram wyników pomiarów rezystancji pojedynczego opornika

### 3.3. Pomiar rezystancji wielu oporników tej samej serii

Multimetrem BM859CF wykonano pomiary rezystancji kolejno 40 sztuk oporników metalizowanych typu MŁT o wartości  $470\text{ k}\Omega$  i tolerancji  $\pm 10\%$  pochodzących z jednej serii produkcyjnej. Multimetr ustawiono na zakres  $500,00\text{ k}\Omega$  (ze standardową rozdzielczością  $4^{4/5}$  cyfry). Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci wykresu na Rys.3.5. Kolejne punkty połączono ze sobą odcinkami. Wyniki pomiarów różnią się wyraźnie między sobą, co oznacza występowanie rozrzutu parametrów oporników w serii produkcyjnej. Celem pomiarów jest oszacowanie parametrów statystycznych z próby rezystorów i ocenie, czy seria produkcyjna spełnia wymagania deklarowanej przez producenta tolerancji  $\pm 10\%$ .



Rys.3.5. Wyniki pomiarów rezystancji 40 sztuk oporników  $470\text{ k}\Omega \pm 10\%$

Na podstawie wyników pomiarów obliczono:

- wartość średnią:  $\bar{x} = 470621\ \Omega$

- odchylenie standardowe pojedynczego wyniku:  $s(x) = 13763,71\ \Omega \approx 13800\ \Omega$

W rozpatrywanym przypadku należy ustalić, czy zaobserwowany rozrzut wartości rezystancji może upoważniać do stwierdzenia, że seria oporników z których pochodzi badana próba spełnia wymogi tolerancji. Zakładając, że wartości rezystancji podlegają rozkładowi normalnemu można przyjąć, iż prawdopodobieństwo, że dowolny opornik będzie miał rezystancję z zakresu od  $\mu - 3\sigma$  do  $\mu + 3\sigma$  (tzw. przedział trzy sigma) jest równe  $99,7\%$ , a więc bardzo bliskie  $100\%$ . Najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej  $\mu$  jest wartość

średnia  $\bar{x}$ , a najlepszym estymatorem odchylenia standardowego  $\sigma$  jest odchylenie standardowe z próby  $s(x_i)$ . Obliczamy połowę szerokości przedziału trzy sigma:

$$3\sigma = 3s(x) = 41400 \Omega \approx 42 \text{ k}\Omega$$

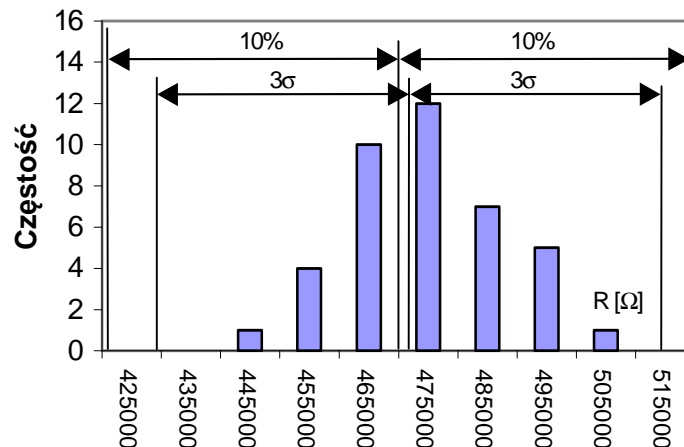
Wynik zaokrąglono w górę do 2 cyfr znaczących aby uniknąć zbyt dużego zaokrąglenia powyżej 20 % (czyli do 50 k $\Omega$ ). Przyjmując z punktu 3.3 błąd graniczny pomiarów:

$$\Delta_{gr} = 400 \Omega = 0,4 \text{ k}\Omega$$

należy stwierdzić, że jest on przeszło 100 razy mniejszy od rozrzutu wartości rezystancji  $3\sigma$ , a więc można go zaniedbać w tej analizie. Przyjmując że wartości rezystancji podlegają rozkładowi normalnemu, wyniki obliczeń można podsumować następująco:

Rezystancje badanych oporników podlegają rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej 471 k $\Omega$  i odchyleniu standardowym 13,8 k $\Omega$ . Oznacza to, że dowolny opornik z serii produkcyjnej posiada rezystancję z zakresu od 429 k $\Omega$  do 513 k $\Omega$  prawdopodobieństwem 99,7 % (przedział  $3\sigma$ ).

Na Rys.3.6. przedstawiono wyniki pomiarów w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu. Wszystkie zmierzone rezystory mają rezystancję mieszczącą się w zakresie 470 k $\Omega \pm 10\%$ , czyli od 423 do 517. Również estymowany przedział  $3\sigma$  w całości mieści się granicach określonych tą tolerancją.



Rys.3.6. Histogram wyników pomiarów rezystancji serii oporników

### 3.4. Pomiar napięcia skutecznego w sieci energetycznej

Multimetrem BM859CF wykonano serię 450 pomiarów napięcia w sieci energetycznej. Pomiar trwał 10 minut. Multimetr ustawiono na zakres 500,00 V (ze standardową rozdzielczością  $4^{4/5}$  cyfry). Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci wykresu na Rys.3.7. Kolejne punkty połączono ze sobą odcinkami. Wyniki pomiarów różnią się wyraźnie między sobą, co oznacza występowanie przypadkowych zmian wartości napięcia w sieci. Celem pomiarów jest oszacowanie parametrów statystycznych wartości napięć i ocenienie, czy napięcie spełnia wymagania przepisów. W Polsce zgodnie z obowiązującymi przepisami [6, 7] w sieci energetycznej *nn* średnia wartość skuteczna napięcia fazowego mierzona w ciągu 10 minut (w normalnych warunkach pracy, wyłączając przerwy w zasilaniu) powinna mieścić się w przedziale  $230V \pm 10\%$ , dla 95% pomiarów w okresie każdego tygodnia.

Na podstawie wyników pomiarów obliczono:

- wartość średnią:  $\bar{x} = 229,3078 \text{ V}$
- odchylenie standardowe pojedynczego wyniku:  $s(x) = 0,556655 \text{ V} \approx 0,557 \text{ V}$

- odchylenie standardowe średniej:  $s(\bar{x})=0,322 \text{ V}$

Z danych miernika (Tab. 4.1) obliczono jego błąd graniczny  $\Delta_{gr}$  zgodnie ze wzorem (16a):

$$\Delta_{gr} = 0,4\% \cdot 229,3 \text{ V} + 40 \cdot 0,01 \text{ V} = 0,917 \text{ V} + 0,4 \text{ V} = 1,317 \approx 1,32 \text{ V}$$

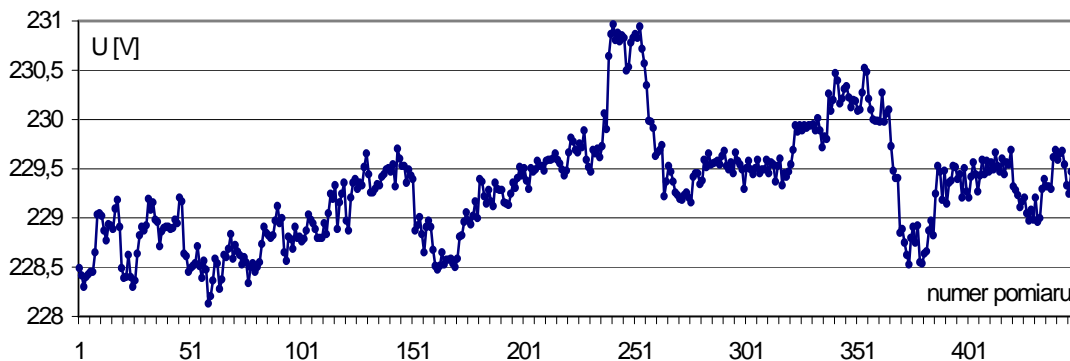
Obliczenie niepewności:

- niepewność typu A:  $u_i=s(\bar{x})=0,322 \text{ V}$

- niepewność typu B:  $u_j = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} = \frac{1,32 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,763 \text{ V}$

- niepewność łączna:  $u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} = \sqrt{0,332^2 \text{ V}^2 + 0,763^2 \text{ V}^2} = 0,832 \text{ V}$

- niepewność rozszerzona:  $U = k \cdot u_c = 2 \cdot 0,832 \text{ V} = 1,664 \text{ V} \approx 1,7 \text{ V}$

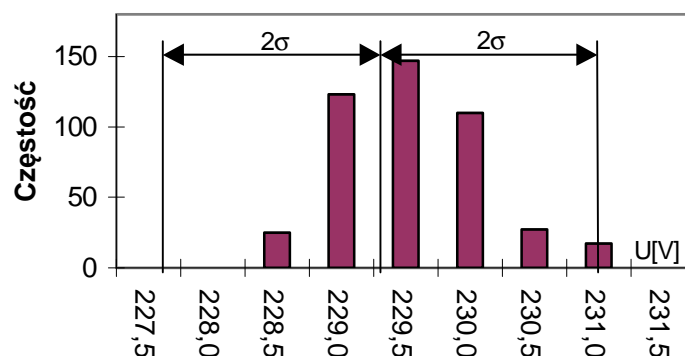


Rys.3.7. Wyniki 450 pomiarów napięcia skutecznego w sieci energetycznej 230 V

Niepewność rozszerzoną obliczono zakładając rozkład normalny i poziom ufności 95,6% (współczynnik rozszerzenia  $k=2$ ). Ostatecznie wynik pomiaru średniej wartości skutecznej napięcia w czasie 10 minut można zapisać następująco:

$U=229,3 \text{ V} \pm 1,7 \text{ V}$  gdzie liczba za znakiem  $\pm$  jest wartością niepewności rozszerzonej obliczonej dla współczynnika rozszerzenia  $k=2$  opartego na rozkładzie normalnym i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na 95,6%

Na Rys.3.8. przedstawiono wyniki pomiarów w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu. Wszystkie wyniki pomiarów napięcia mieszczą się w zakresie  $230 \text{ V} \pm 10 \%$ , czyli od 207 V do 253 V. Również estymowany przedział  $2\sigma$  w całości mieści się granicach określonych tą tolerancją z dużym zapasem. Można więc stwierdzić, że w badanym okresie 10 minut napięcie w sieci spełniało wymagania przepisów.

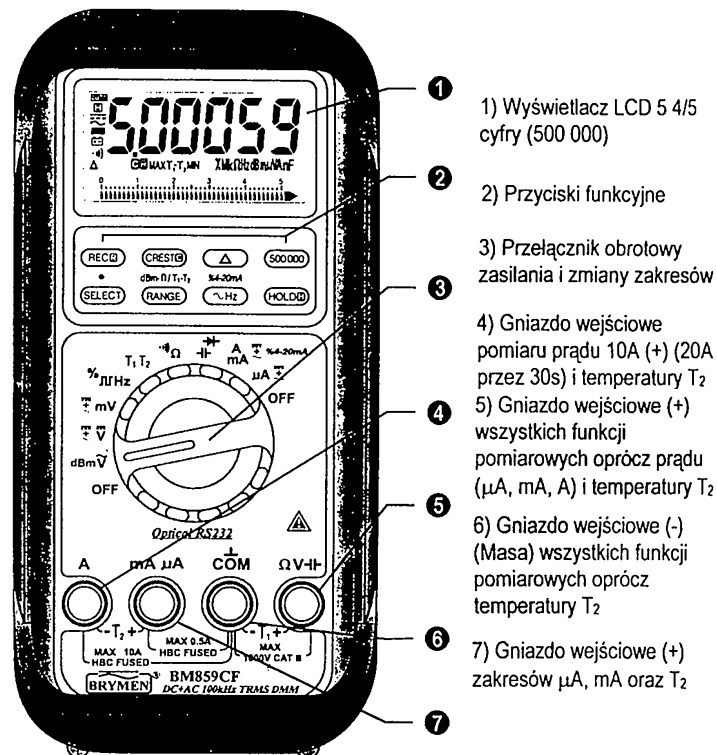


Rys.3.8. Histogram wyników pomiarów napięcia w sieci 230 V

#### 4. Opis wykorzystywanej aparatury

W ćwiczeniu stosowany jest multimetr cyfrowy typu BM859CF firmy Brymen wraz z kablem BC85x umożliwiającym dołączenie miernika do interfejsu szeregowego RS 232 komputera, gwarantując przy tym pełną izolację galwaniczną uzyskaną poprzez zastosowanie sprzężenia optycznego w podczerwieni. W komputerze zainstalowany jest program pozwalający na automatyczne wykonanie serii pomiarów i zapis uzyskanych wyników do pliku tekstowego na dysku twardym komputera. Format pliku pozwala na import zapamiętanych danych do arkusza kalkulacyjnego Excel lub innego programu umożliwiającego obróbkę matematyczną i opracowanie wykresów. Szczegółowa instrukcja obsługi miernika i oprogramowania jest dostępna na stanowisku laboratoryjnym oraz można ją pobrać z Internetu. Studenci zobowiązani są do zapoznania się z przygotowaną dokumentacją przed rozpoczęciem pomiarów. Najważniejsze elementy dostępne na płycie czołowej miernika przedstawia rys.4.1.

Miernik wyposażony jest w wyświetlacz LCD (1) o rozdzielczości  $4\frac{4}{5}$  cyfry (50 000 jednostek) przełączanej przyciskiem funkcyjnym (500000) na  $5\frac{4}{5}$  cyfry (500 000 jednostek) na zakresach DCV oraz dodatkowo na 6 cyfr przy wybranej funkcji pomiaru częstotliwości (999 999 jednostek).



Rys.4.1. Płyta czołowa miernika Brymen BM859CF z opisem głównych elementów

Włączenie wyższej rozdzielczości jednocześnie powoduje zmniejszenie szybkości wykonywania pomiarów z 5 pomiarów/s do 1,25 pomiarów/s. Włączenie zasilania miernika następuje po przestawieniu przełącznika obrotowego (3) na pozycję wybranej funkcji pomiarowej, a jego wyłączenie uzyskuje się w pozycji OFF lub automatycznie po 4,5 minuty braku aktywności miernika. Zakres pomiarowy jest dobierany automatycznie przez miernik lub ręcznie przyciskiem funkcyjnym (RANGE).

W czasie ćwiczenia będą wykorzystywane funkcje pomiaru napięcia stałego DCV, napięcia przemiennego ACV i rezystancji. W Tab.4.1 przedstawiono wybrane parametry miernika umożliwiające oszacowanie popełnianych przez miernik błędów. Należy zwrócić

uwagę, że producent miernika w instrukcji obsługi nieprawidłowo stosuje pojęcie „dokładność”, w rzeczywistości w tabeli określono błędy graniczne miernika jako sumę dwóch składników (16a): multiplikatywnego - wyrażonego w % wartości wskazania miernika i addytywnego - wyrażonego jako wielokrotność wartości odpowiadającej najmniej znaczącej cyfrze na wyświetlaczu, czyli rozdzielczości podanej w jednostkach mierzonej wielkości.

**UWAGA!** Przed dołączeniem miernika do obwodu pomiarowego należy najpierw włączyć jego zasilanie i wybrać odpowiednią funkcję pomiarową przełącznikiem obrotowym (3). Zawsze należy odłączyć przewody pomiarowe miernika od punktów pomiarowych przed jakąkolwiek zmianą funkcji pomiarowej przełącznikiem obrotowym (3).

Kabel BC85x należy dołączyć do gniazda interfejsu RS 232 (9 pin) komputera przed jego włączeniem. Łączenie i rozłączanie kabla z miernikiem może być bezpiecznie realizowane w dowolnej chwili dzięki zastosowaniu optycznych układów izolacji galwanicznej, należy jednak tego unikać w czasie działania programu sterującego, gdyż może to spowodować utratę danych pomiarowych.

Tab.4.1. Błędy graniczne miernika Brymen BM859CF dla napięć stałych DC, rezystancji R oraz napięć przemiennych AC, AC+DC (fragment oryginalnej instrukcji obsługi)

PARAMETRY ELEKTRYCZNE		
Dokładność: $\pm$ (% wartości wskazania + liczba cyfr) jeśli nie jest inaczej określona, dla temperatury 23°C $\pm$ 5°C i wilgotności względnej poniżej 75%.		
Dokładność pomiaru wartości rzeczywistej skutecznej napięcia i prądu podana jest w zakresie od 5% do 100% zakresu pomiarowego (jeśli nie jest inaczej określona). Maksymalny współczynnik kształtu < 5:1 dla całego zakresu i < 10:1 do połowy zakresu, dla określonego pasma składowych niesinusoidalnych.		
Napięcie stałe DC V		
ZAKRES	BM859CF	BM857
Dokładność		
500.00mV, 5.0000V, 50.000V	0.02%+2c	0.03%+2c
500.00V	0.04%+2c	0.05%+2c
1000.0V	0.05%+2c	0.1%+2c
NMRR: > 60dB @ 50/60Hz CMRR: >120dB @ DC, 50/60Hz, Rs=1k $\Omega$ Impedancja wej.: 10M $\Omega$ /30pF nominalnie (80pF nominalnie na zakresie 500mV)		
Rezystancja $\Omega$		
ZAKRES	BM859CF	BM857
Dokładność		
500.00 $\Omega$ , 5.0000k $\Omega$	0.07%+10c	0.1%+6c
50.000k $\Omega$ , 500.00k $\Omega$	0.07%+2c	
5.0000M $\Omega$ , 50.000M $\Omega$	0.2%+6c	0.4%+6c
	2.0%+6c	2.0%+6c
Napięcie otwartego obwodu < 1.3V DC (< 3V DC na zakresie 500 $\Omega$ )		

Napięcie przemienne AC, AC+DC		
ZAKRES	BM859CF	BM857
Dokładność *		
20Hz...45Hz		
500.00mV, 5.0000V, 50.000V	1.5% + 40c	Nieokreślona
500.00V, 1000V	Nieokreślona	
45Hz...300Hz		
500.00mV	0.3% + 20c	0.8% + 60c
5.0000V, 50.000V	0.8% + 20c	
500.00V, 1000V	0.4% + 40c	
300Hz...5kHz		
500.00mV	0.3% + 10c	0.8% + 40c
5.0000V, 50.000V, 500.00V	0.4% + 40c	2.0% + 60c
1000.0V	0.8% + 40c (300Hz...1kHz)	1.0% + 40c
5kHz...20kHz		
500.00mV	0.5% + 20c	1dB **
5.0000V, 50.000V	0.8% + 20c	2dB **
500.00V	0.5% + 20c	3dB **
1000.0V	Nieokreślona	
20kHz...100kHz		
500.00mV	2.0% + 40c	Nieokreślona
5.0000V, 50.000V	4.0% + 40c **	
500.00V, 1000.0V	Nieokreślona	

\* Od 5% do 10% zakresu:  
dokładność % ww (lub w dB) + 80c

\*\*Od 5% do 10% zakresu:  
dokładność % ww (lub w dB) + 180c

\*\*Od 10% do 15% zakresu:  
dokładność % ww (lub w dB) + 100c

## 5. Program ćwiczenia

### 5.1. Przygotowanie do pomiarów, wykonanie pomiarów próbnych

1. Zapoznać się z instrukcją obsługi multimetru. Dołączyć kabel transmisji danych BC85X do złącza RS 232 komputera oraz do miernika, zgodnie z rys.5.1.
2. Włączyć miernik i ustawić funkcję pomiaru napięć stałych DCV. Dołączyć do miernika ogniwo 3R12 przeznaczone do pomiarów w punkcie 5.2 i sprawdzić działanie miernika.
3. Włączyć komputer i uruchomić program DMM Data Logger lub inny wskazany przez prowadzącego, zapoznać się z podstawowymi funkcjami programu korzystając z instrukcji obsługi i wbudowanej w program opcji HELP. Wpisać dane członków zespołu, zastosowane nastawy multimetru oraz rodzaj wykonywanych pomiarów.
4. Sprawdzić poprawność transmisji danych z miernika do komputera. W tym celu wykonać próbną serię 10 pomiarów, zapisać wyniki do pliku na dysku twardym komputera. Otworzyć plik tekstowy z danymi programem Notatnik lub innym (WordPad, MS Word) i sprawdzić poprawność zapisanych danych. Zanotować do protokołu nazwę pliku z wynikami pomiarów, zastosowaną konfigurację programu oraz ustawienia multimetru (zakres, funkcja, rozdzielczość, błąd graniczny). Skonsultować uzyskane wyniki z prowadzącym.

### 5.2. Pomiary napięcia stałego ogniwa elektrochemicznego

1. Ustawić miernik do pomiaru napięć stałych DCV z automatycznym wyborem zakresu. Włączyć podwyższoną rozdzielczość pomiarów  $5^{4/5}$  cyfry (500 000 jednostek). Wpisać do programu dane członków zespołu, nastawy multimetru oraz rodzaj wykonywanych pomiarów.
2. Wykonać serię 100 pomiarów napięcia dla ogniwa elektrochemicznego 3R12 (lub elektronicznego źródła napięcia stałego) wskazanego przez prowadzącego, wyniki pomiarów z każdej serii zapisać w oddzielnym pliku na dysku.
3. Sprawdzić poprawność danych zapisanych w pliku. Zanotować do protokołu dane techniczne wykorzystywanych w pomiarach źródeł napięcia stałego, zastosowaną konfigurację programu, ustawienia multimetru (zakres, funkcja, rozdzielczość, błąd graniczny) oraz nazwy plików z wynikami pomiarów. W razie potrzeby powtórzyć pomiary jeśli w pliku jest mniej niż połowa zaplanowanych wyników pomiarów. Po wykonaniu pomiarów odłączyć multimetr od mierzonego napięcia.

### 5.3. Pomiary rezystancji pojedynczego rezystora

1. Ustawić miernik do pomiaru rezystancji, wybrać ręcznie zakres 500.00 k $\Omega$ . Dołączyć do miernika jeden rezystor 470 k $\Omega$  wybrany dowolnie z serii rezystorów o tolerancji  $\pm 10\%$ . Wpisać do programu dane członków zespołu, nastawy multimetru oraz rodzaj wykonywanych pomiarów.
2. Wykonać serię 100 pomiarów rezystancji wybranego rezystora, wyniki pomiarów zapisać w pliku na dysku.
3. Sprawdzić poprawność danych zapisanych w pliku. Zanotować do protokołu dostępne dane techniczne badanego rezystora, zastosowaną konfigurację programu, ustawienia multimetru (zakres, funkcja, rozdzielczość, błąd graniczny) oraz nazwę pliku z wynikami pomiarów. W razie potrzeby powtórzyć pomiary jeśli w pliku jest mniej niż połowa zaplanowanych wyników pomiarów.

### 5.4. Pomiary rezystancji wielu rezystorów z tej samej serii

1. Ustawić miernik do pomiaru rezystancji, wybrać ręcznie zakres 500.00 k $\Omega$ . Wpisać do programu dane członków zespołu, nastawy multimetru oraz rodzaj wykonywanych pomiarów.

2. Wykonać serię pomiarów rezystancji losowo wybranych 40 sztuk oporników 470 k $\Omega$  z serii o tolerancji  $\pm 10\%$ . Rezystancję każdego z wybranych oporników należy zmierzyć jednokrotnie. Wyniki pomiarów zapisać w pliku na dysku. Podczas pomiarów zwrócić szczególną uwagę, aby w chwili rejestracji wyniku pomiaru po dołączeniu kolejnego opornika wskazania miernika były ustabilizowane.
3. Sprawdzić poprawność danych zapisanych w pliku. Zanotować do protokołu dostępne dane techniczne badanych rezystorów, zastosowaną konfigurację programu, ustawienia multimetru (zakres, funkcja, rozdzielczość, błąd graniczny) oraz nazwę pliku z wynikami pomiarów. W razie potrzeby powtórzyć pomiary jeśli w pliku jest mniej niż połowa zaplanowanych wyników pomiarów.

### 5.5. Pomiary napięcia przemiennego w sieci energetycznej *nn*

1. Zanotować do protokołu przekładnię napięciową przekładnika wskazanego przez prowadzącego (np. 250/100 V/V lub inną). Ustawić miernik do pomiaru napięcia przemiennego ACV, wybrać ręcznie zakres 500.00 V lub inny dopasowany do napięcia wtórnego zastosowanego przekładnika napięciowego. Dołączyć miernik do sieci energetycznej 230V poprzez przekładnik napięciowy.
2. Wykonać dwie serie pomiarów wartości skutecznej napięcia, każda o czasie trwania 10 minut. Wyniki pomiarów każdej serii zapisać w oddzielnym pliku.
3. Sprawdzić poprawność danych zapisanych w pliku. Zanotować do protokołu zastosowaną konfigurację programu, ustawienia multimetru (zakres, funkcja, rozdzielczość, błąd graniczny) oraz nazwy plików z wynikami pomiarów. W razie potrzeby powtórzyć pomiary jeśli w pliku jest mniej niż połowa zaplanowanych wyników pomiarów.
4. Odłączyć miernik od układu pomiarowego i wyłączyć go.
5. Skopiować z dysku komputera na nośnik danych wszystkie zapisane pliki z wynikami pomiarów w celu wykonania sprawozdania. Zanotować do protokołu parametry wykorzystywanej w pomiarach aparatury oraz ewentualne uwagi z przebiegu pomiarów.

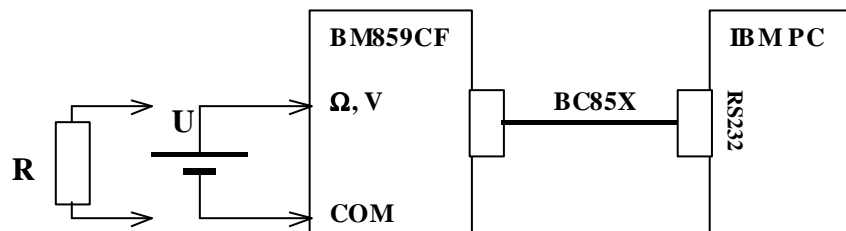
### 5.6. Opracowanie wyników pomiarów

1. Sprawozdanie można przygotować wykonując niezbędne obliczenia korzystając z arkusza kalkulacyjnego Excel lub podobnego lub za pomocą kalkulatora (najlepiej z wbudowanymi funkcjami statystycznymi). Korzystnie jest uprzednio zainstalować narzędzia analizy danych *Analysis ToolPak* (opcja *Narzędzia/Dodatki/Analysis ToolPak*). Wykresy i histogramy mogą być opracowane ręcznie lub programem Excel. W przypadku wykonywania obliczeń za pomocą kalkulatora można ograniczyć się do 20 pierwszych pomiarów z wykonanych serii. Wyniki pomiarów uwzględnione w obliczeniach należy zamieścić w sprawozdaniu.
2. Na podstawie wyników pomiarów napięcia ogniwa galwanicznego i danych technicznych multimetru wyznaczyć wartość mierzonego napięcia, błąd graniczny miernika, niepewności typu A i B, niepewność całkowitą i rozszerzoną. Zapisać poprawnie wynik pomiarów zaokrąglając go odpowiednio i podając jego niepewność. Przedstawić wyniki pomiarów z serii na wykresie i w postaci histogramu. Szerokość przedziałów i ich liczbę w histogramie dobrać odpowiednio do uzyskanych wyników, tak aby było możliwe ocenienie kształtu krzywej zaobserwowanego rozkładu prawdopodobieństwa. Przykład poprawnie opracowanych wyników pomiarów przedstawiono w rozdziale 3.1. Porównać uzyskane wyniki pomiarów z danymi technicznymi producenta baterii 3R12.
3. Wyniki pomiarów wielokrotnych rezystancji pojedynczego opornika opracować analogicznie jak wyniki pomiarów napięcia w punkcie poprzednim. Ocenić, czy wyniki pomiarów są zgodne z parametrami rezystora podanymi przez jego producenta. Przykład poprawnie opracowanych wyników pomiarów przedstawiono w rozdziale 3.2.

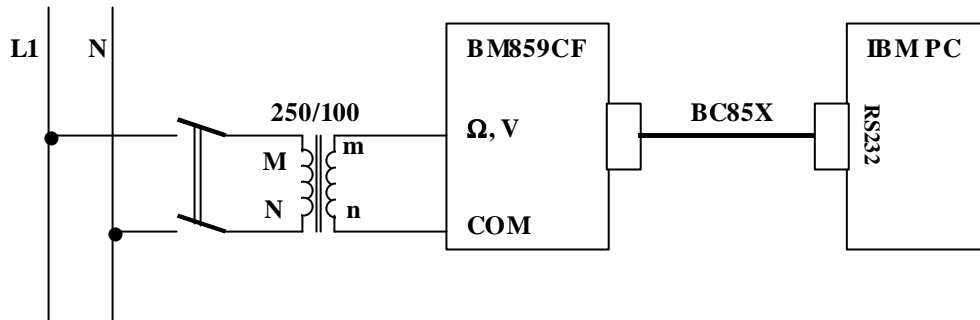


4. Na podstawie wyników pomiarów rezystancji losowo wybranych 40 sztuk oporników z serii produkcyjnej wyznaczyć parametry statystyczne badanej próby (wartość średnią, odchylenie standardowe rezystancji pojedynczego opornika, przedział  $3\sigma$ ). Przedstawić wyniki pomiarów z serii na wykresie i w postaci histogramu. Zapisać poprawnie wynik pomiarów zaokrąglając go odpowiednio i podając jego niepewność tak, aby można było go porównać z danymi producenta (np.:  $470\text{ k}\Omega \pm 10\%$  lub inne odczytane z rezystorów) pamiętając, że oporniki powinny mieć rezystancję mieszczącą się w podanej tolerancji wykonania. Ocenic na podstawie uzyskanych wyników, czy oporniki mają odpowiednie rezystancje, zgodne z parametrami podanymi przez producenta. Przykład poprawnie opracowanych wyników pomiarów przedstawiono w rozdziale 3.3.
5. Na podstawie wyników pomiarów wartości skutecznej napięcia w sieci energetycznej wyznaczyć parametry statystyczne badanej próby. Na podstawie danych technicznych multimetru wyznaczyć błąd graniczny pomiaru napięcia. Podać wartość średnią napięcia skutecznego w sieci (odpowiednio zaokrągloną), ocenić niepewności. Przedstawić wyniki pomiarów z serii na wykresie i w postaci histogramu. Ocenic na podstawie uzyskanych wyników, czy napięcie spełnia wymagania przepisów. W Polsce zgodnie z obowiązującymi przepisami [6, 7] w sieci energetycznej *nn* średnia wartość skuteczna napięcia fazowego mierzona w ciągu 10 minut (w normalnych warunkach pracy, wyłączając przerwy w zasilaniu) powinna mieścić się w przedziale  $230\text{V} \pm 10\%$ , dla 95% pomiarów w okresie każdego tygodnia. Przykład poprawnie opracowanych wyników pomiarów przedstawiono w rozdziale 3.4.

## 6. Schematy układów pomiarowych



Rys.5.1. Schemat układu do pomiaru napięć stałych i rezystancji



Rys.5.2. Schemat układu do pomiaru napięcia w sieci energetycznej

## 7. Literatura

1. Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement, Technical Note 1297, NIST, 1994 Edition
2. ISO 3534-1:1993 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms
3. Kuśmiderska B., Meldizon J., Podstawy rachunku błędów w pracowni fizycznej, Wyd. Politechniki Lubelskiej, Lublin 1990
4. Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii, GUM, Warszawa 1996
5. PN-71/N-02050, Metrologia. Nazwy i określenia
6. PN-EN 50160, Parametry napięcia zasilającego w publicznych sieciach rozdzielczych
7. PN-IEC 60038, Napięcia znormalizowane IEC
8. Respondowski R., Opracowanie wyników pomiarów fizycznych, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999
9. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik, GUM, Warszawa 1999

## 8. Pytania kontrolne

1. W jakim celu realizujemy serie pomiarów?
2. Wyjaśnij pojęcia: rozkład prawdopodobieństwa, dystrybuanta, funkcja gęstości prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana, wariancja i odchylenie standardowe.
3. Na czym polega estymacja, co to jest estymator i jakie są stosowane estymatory wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego?
4. Wyjaśnij pojęcia: dokładność, precyzja, czułość, rozdzielczość, błąd pomiaru.
5. Co to jest niepewność pomiaru i jak ją wyznaczamy?
6. Jaką wartość współczynnika rozszerzenia przyjmuje się w praktyce i dlaczego?
7. Jakie są zasady zaokrąglania wyniku pomiaru?
8. Jakie parametry miernika są potrzebne przy wyznaczaniu niepewności pomiaru?
9. Jakie wymagania powinno spełniać napięcie w sieci energetycznej nn?
10. Jakie pomiary są przewidziane w programie ćwiczenia?