METROLOGIA

Dr inż. Eligiusz PAWŁOWSKI

Politechnika Lubelska

Wydział Elektrotechniki i Informatyki

Prezentacja do wykładu dla EINS

Zjazd 3, wykład nr 5, 6

Prawo autorskie

Uwagi dydaktyczne

Niniejsza prezentacja stanowi **tylko i wyłącznie materiały pomocnicze** do wykładu z przedmiotu Metrologia prowadzonego dla studentów Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej. Udostępnienie studentom tej prezentacji nie zwalnia ich z konieczności sporządzania **własnych notatek z wykładów** ani też nie zastępuje **samodzielnego studiowania** obowiązujących podręczników.

Tym samym zawartość niniejszej prezentacji w szczególności **nie może być** traktowana jako zakres materiału obowiązujący na egzaminie.

Na egzaminie obowiązujący jest **zakres materiału faktycznie wyłożony podczas wykładu** oraz zawarty w odpowiadających mu fragmentach **podręczników** podanych w wykazie literatury do wykładu.

Eligiusz Pawłowski

Tematyka wykładu

Podstawowe terminy statystyczne

Niepewność pomiaru i jej wyznaczanie

Zaokrąglanie wyników obliczeń

Zapisywanie wyniku pomiaru

Metody statystyczne w metrologii - literatura

1. **Wyrażanie niepewności pomiaru.** Przewodnik, GUM, Warszawa 1999
2. **Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement**, Technical Note 1297, NIST, 1994 Edition (http://www.nist.gov/)
3. ISO 3534-1:1993 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms
4. Kuśmiderska B., Meldizon J., Podstawy rachunku błędów w pracowni fizycznej, Wyd. Politechniki Lubelskiej, Lublin 1990
5. Respondowski R., Opracowanie wyników pomiarów fizycznych, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999
6. Plik pomocy programu Microsoft Excel – funkcje statystyczne

Zmienna losowa

Zmienna losowa jest to zmienna (ciągła lub dyskretna), która może przybierać **dowolne wartości** z **określonego zbioru** i z którą związany jest **rozkład prawdopodobieństwa**.

Przykłady:

Wynik rzutu monetą (0,1),

Wynik rzutu kostką do gry (1,2,3,4,5,6),

Wynik losowania Toto Lotka,

Wynik pomiaru napięcia w sieci energetycznej

i wiele innych ...

Rozkład prawdopodobieństwa

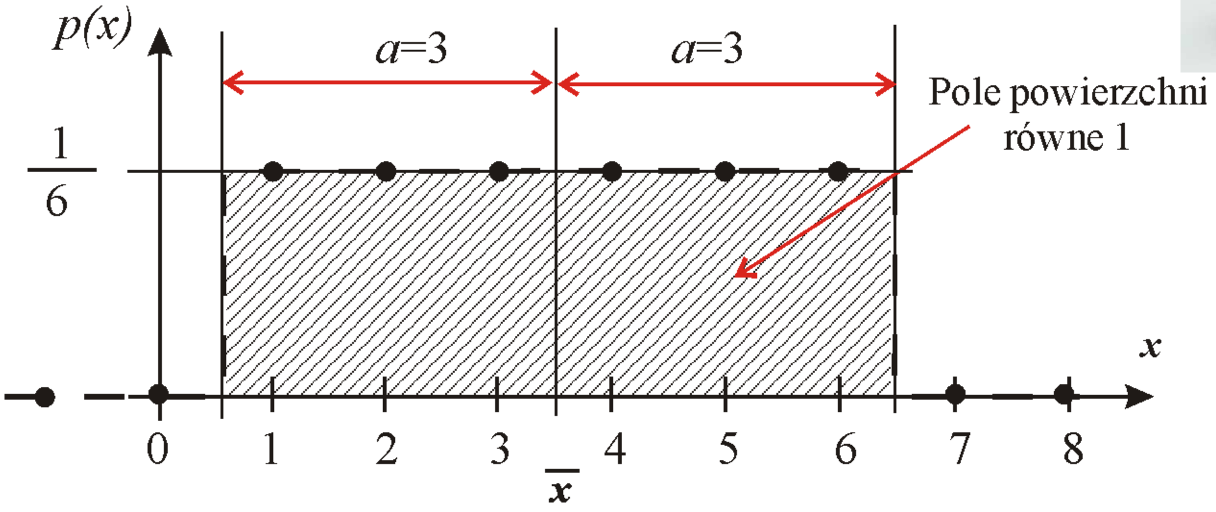
Rozkład prawdopodobieństwa jest funkcją określającą prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmie daną wartość, lub wartość należącą do danego zbioru wartości.

Funkcja prawdopodobieństwa (dla zmiennej dyskretnej) określa, dla każdej wartości x_i zmiennej X, prawdopodobieństwo p_i, że zmienna dyskretna przyjmie wartość x_i:

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

Rozkład prawdopodobieństwa - przykład

rzut kostką do gry



Rozkład prawdopodobieństwa dla wyników rzutu kostką do gry

Dystrybuanta i funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Dystrybuanta jest to funkcja F określająca dla każdej wartości x prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmuje wartość mniejszą lub równą x:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ (dla zmiennej losowej ciągłej X) jest to pochodna (jeśli istnieje) dystrybuanty:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Pole powierzchni ograniczone **funkcją gęstości prawdopodobieństwa** dla dowolnej zmiennej losowej jest równe **1**

Parametry rozkładu zmiennej losowej

Parametrem rozkładu zmiennej losowej jest wielkość używana do opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej, np.:

- wartość oczekiwana,
- wariancja,
- odchylenie standardowe

i inne wielkości.

Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwana μ jest parametrem rozkładu określonym następująco:

- dla zmiennej losowej **dyskretnej** X przyjmującej wartości x_i z prawdopodobieństwem p_i wartość oczekiwana μ, jeśli istnieje, jest równa:

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie wartości x_i zmiennej X,

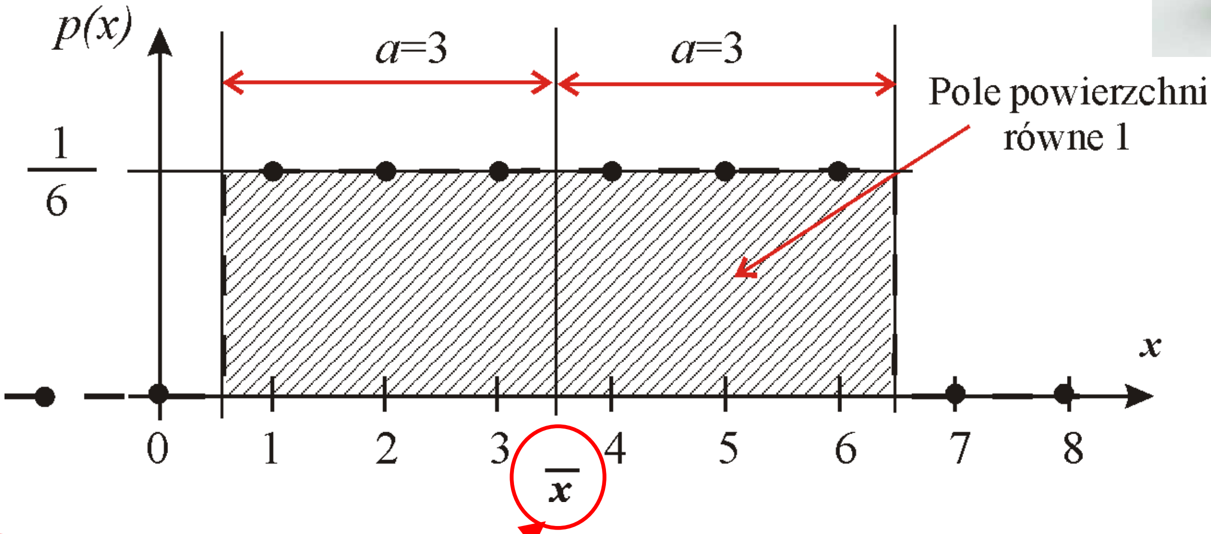
- dla zmiennej losowej **ciągłej** X o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ wartość oczekiwana μ, jeśli istnieje, jest równa:

$$\mu = E(X) = \int x \ f(x) \, dx$$

gdzie całkowanie rozciąga się na cały przedział zmienności X.

Wartość oczekiwana - przykład

rzut kostką do gry



$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Zmienna losowa centrowana

Zmienna losowa centrowana jest to zmienna, której wartość oczekiwana jest równa **zero**.

Jeśli zmienna losowa X ma wartość oczekiwaną μ to odpowiadająca jej zmienna losowa centrowana jest równa (X-μ).

$$E\left(X-\mu\right)=0$$

Wariancja i odchylenie standardowe

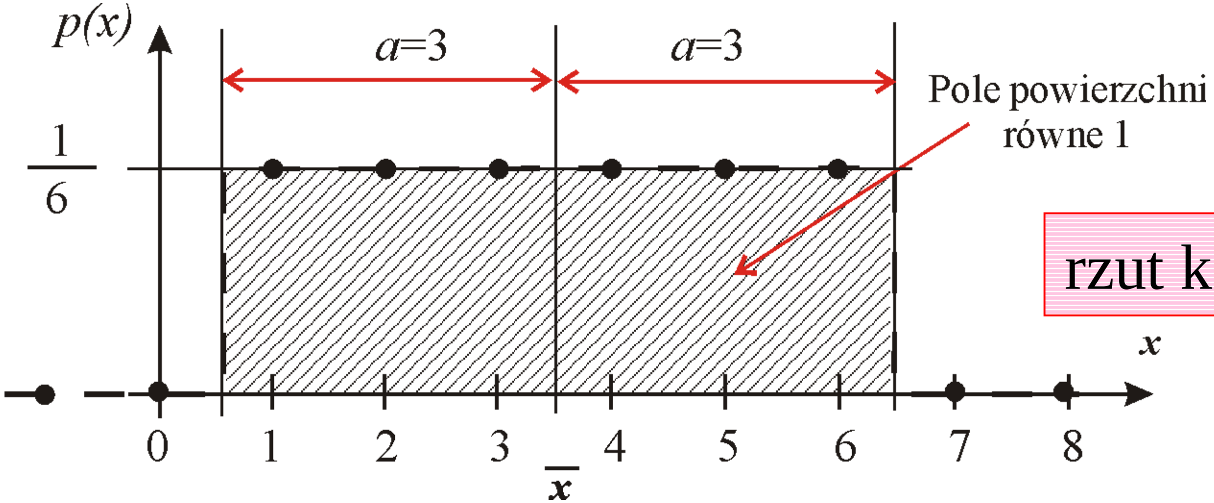
Wariancja σ² (*sigma kwadrat*) jest to wartość oczekiwana kwadratu zmiennej losowej centrowanej:

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\}$$

Odchylenie standardowe σ (*sigma*) jest dodatnim pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Wariancja i odchylenie standardowe - przykład



rzut kostką do gry

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = \frac{1}{6}(1-3{,}5)^2 + \frac{1}{6}(2-3{,}5)^2 + \cdots + \frac{1}{6}(6-3{,}5)^2 =$$

$$= \frac{2}{6}(2{,}5)^2 + \frac{2}{6}(1{,}5)^2 + \frac{2}{6}(0{,}5)^2 = \frac{6{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25}{3} = \frac{8{,}75}{3} = 2{,}916(6)$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}916(6)} \cong 1{,}70783$$

Populacja i próba z populacji

Tak określone parametry rozkładów (wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe) są określone dla całej **populacji**, czyli dla ogółu jednostek podlegających obserwacjom.

W praktyce liczba obserwacji jest ograniczona do pewnej skończonej wartości, czyli z całej populacji pobierana i analizowana jest **próba** obejmująca tylko część populacji.

Przykłady:

-obserwacja wyników rzucania rzeczywistą kostką do gry,

-badania preferencji wyborczych **wszystkich** Polaków (populacji) na podstawie ankiety przeprowadzonej wśród **próby** reprezentatywnej.

Statystyka, estymacja , estymator

Statystyka jest to funkcja zmiennych losowych w próbie, sama również jest zmienną losową.

Estymacja jest to operacja mająca na celu przypisanie wartości liczbowych parametrom rozkładu wybranego jako **model** statystyczny populacji, na podstawie obserwacji tworzących próbę pobraną z tej populacji.

Estymator jest to statystyka (czyli funkcja zmiennych losowych) stosowana do estymacji parametru populacji.

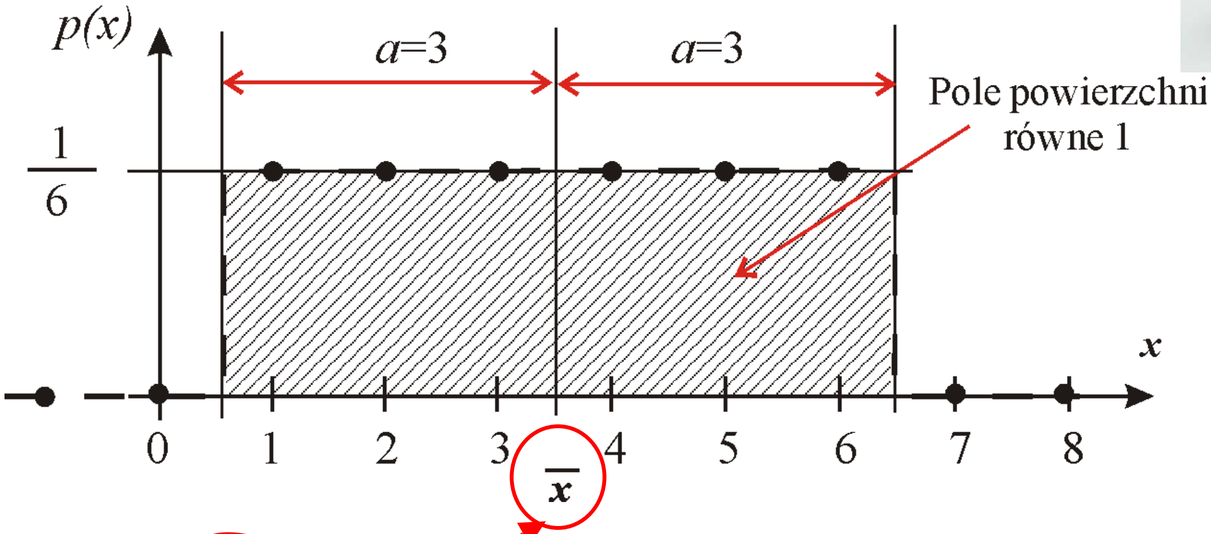
Estymator wartości oczekiwanej

Najlepszym **estymatorem wartości oczekiwanej μ** dla populacji, wyznaczanym na podstawie n - elementowej próby x_1, x_2, ... x_n, jest **wartość średnia $\overline{x}$:**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Estymator wartości oczekiwanej - przykład

rzut kostką do gry



$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\frac{n}{6}\cdot 1 + \frac{n}{6}\cdot 2 + \cdots \frac{n}{6}\cdot 6}{n} = 3{,}5$$

Estymator odchylenia standardowego

Najlepszym **estymatorem odchylenia standardowego σ** dla populacji jest **odchylenie standardowe z próby *s***:

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

pierwiastek z uśrednionego kwadratu różnicy od wartości średniej

Liczba elementów w próbie pomniejszona o jeden

Estymator odchylenia standardowego wartości średniej

Wartość średnia $\overline{x}$ jest również zmienna losową !

Najlepszym estymatorem odchylenia standardowego dla wartości średniej jest:

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}$$

odchylenie standardowe w próbie

pierwiastek z liczebności próby

odchylenie standardowe średniej

Wniosek: odchylenie standardowe średniej z n pomiarów jest $\sqrt{n}$ razy **mniejsze** od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru.

Pomiary wielokrotne i polepszanie dokładności

Wykonywanie serii pomiarów umożliwia **polepszenie dokładności** wyniku. Kolejność postępowania jest następująca:

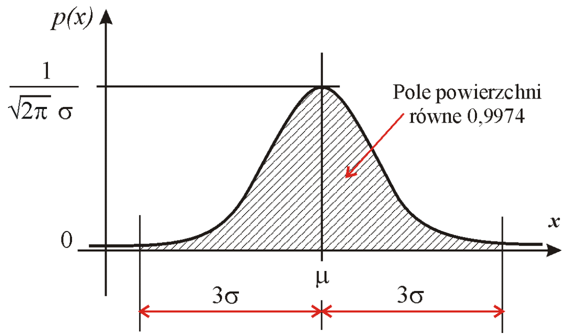
-wykonujemy serię *n* pomiarów mając na uwadze, że zgodnie z poprzednim slajdem dokładność **polepsza** się $\sqrt{n}$ razy, a więc zwiększanie liczby pomiarów na początku daje duże korzyści, ale dla dużych wartości *n* kolejne pomiary dają już coraz mniejszy efekt,

-za wynik pomiaru przyjmujemy wartość średnią,

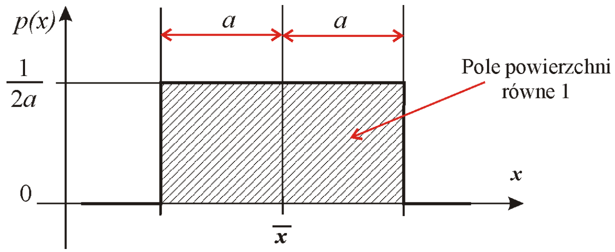
-na podstawie odchylenia standardowego wartości średniej **szacujemy niepewność uzyskanego wyniku pomiaru**, co będzie przedstawione w dalszej części.

Podczas opracowywania wyników pomiarów **najczęściej** stosowane są następujące rozkłady prawdopodobieństwa:

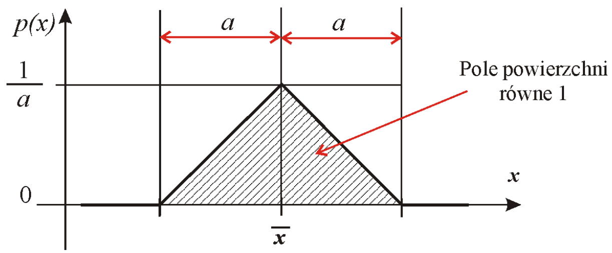
- Rozkład normalny,



- Rozkład równomierny (prostokątny),



- Rozkład trójkątny.



Rozkład normalny

Podczas opracowywania wyników pomiarów najczęściej przydatny jest **rozkład normalny**, dla którego **funkcja gęstości prawdopodobieństwa** jest określona wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Dla rozkładu normalnego, prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale:

od μ - σ do μ + σ jest równe 68,26 %,

od μ - 2σ do μ + 2σ jest równe 95,46 %,

od μ - 3σ do μ + 3σ jest równe **99,74 %.**

Przedział ufności i poziom ufności

Dla rozkładu normalnego, prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale:

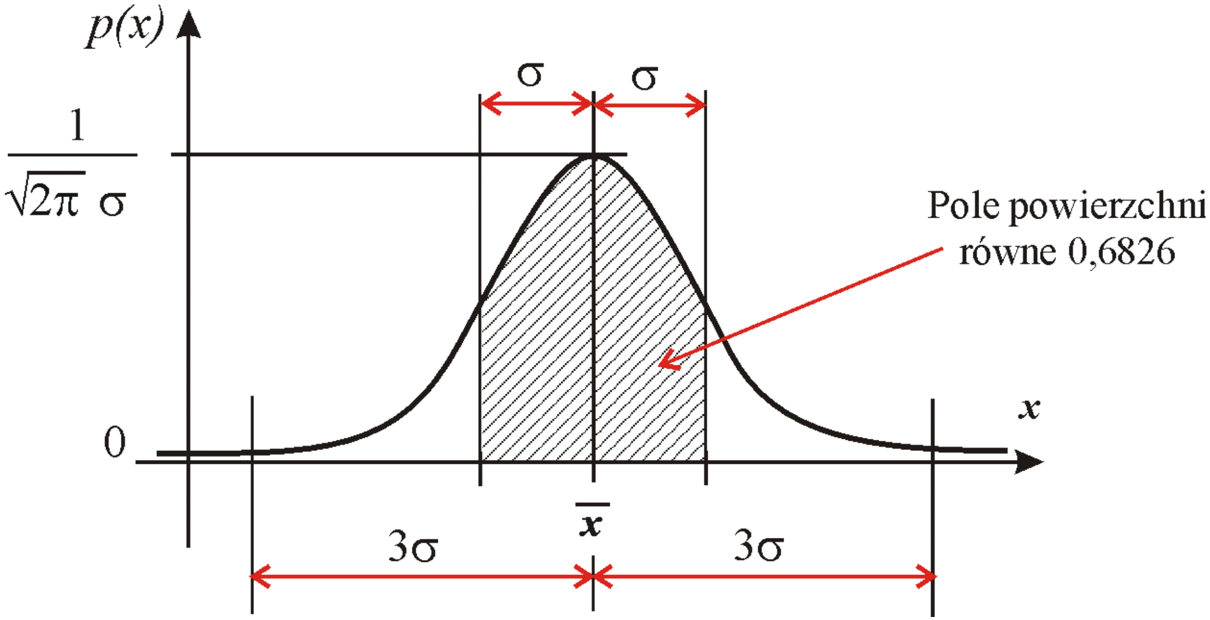
od $\mu - \sigma$ do $\mu + \sigma$	jest równe	68,26 %,
od $\mu - 2\sigma$ do $\mu + 2\sigma$	jest równe	95,46 %,
od $\mu - 3\sigma$ do $\mu + 3\sigma$	jest równe	99,74 %.

Ten przedział wartości nazywamy **przedziałem ufności**

To prawdopodobieństwo nazywamy **poziomem ufności**

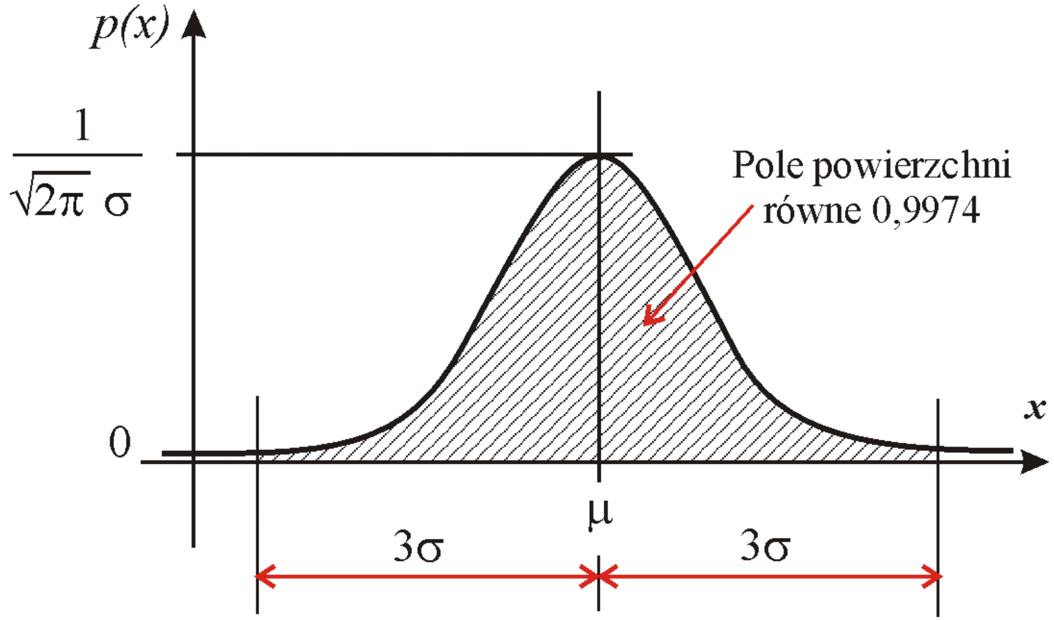
Dla rozkładu normalnego, dla **przedziału ufności** o szerokości **$\pm 3\sigma$** **poziom ufności** jest równy **99,74 %** (czyli prawie 100%).

Rozkład normalny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa



$$\Pr\left(\bar{x}-\sigma < x < \bar{x}+\sigma\right) = 68{,}26\%$$

Rozkład normalny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa



$$\Pr\left(\bar{x} - 3\sigma < x < \bar{x} + 3\sigma\right) = 99.74\%$$

Rozkład równomierny

Często również wykorzystywane są właściwości rozkładu **równomiernego (prostokątnego)** o szerokości 2*a*, dla którego odchylenie standardowe σ wynosi:

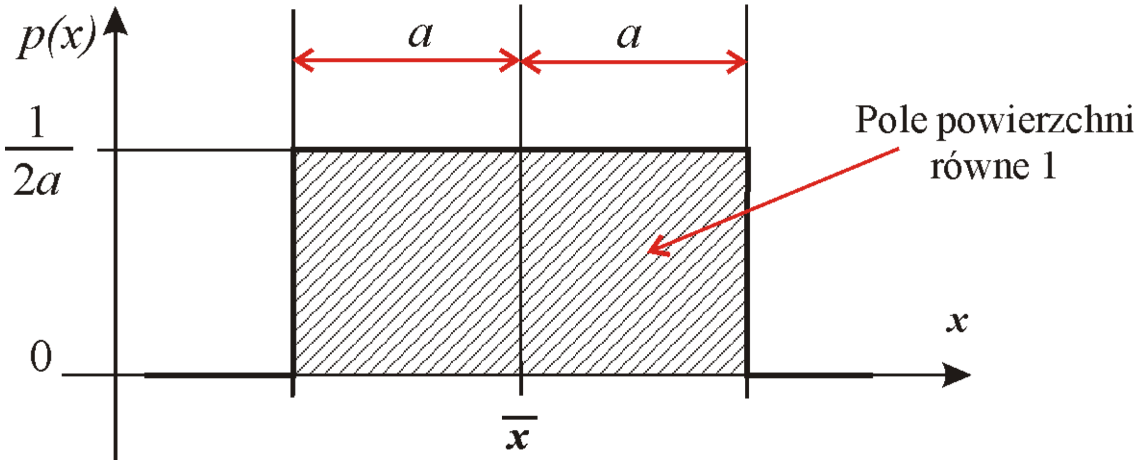
$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Dla rozkładu prostokątnego prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale o szerokości 2*a* wokół wartości oczekiwanej μ jest równe **100 %.**

Rozkład prostokątny jest stosowany do opisu **błędów kwantowania przetworników A/C** oraz przy szacowaniu **błędów granicznych** przyrządów pomiarowych.

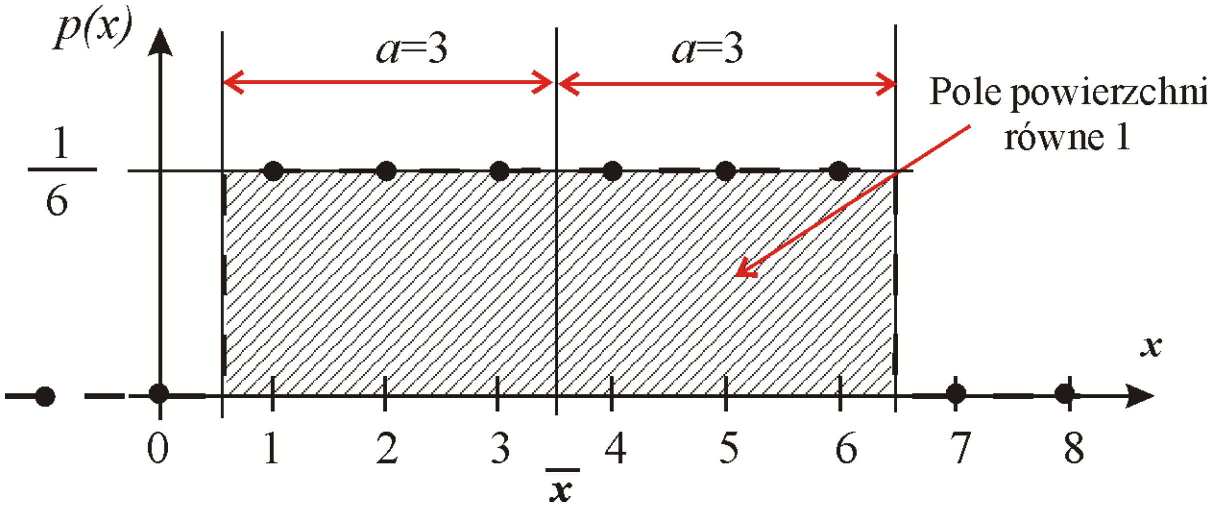
Rozkład równomierny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$\Pr\left(\bar{x} - a < x < \bar{x} + a\right) = 100\%$$



$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Rozkład równomierny – przykład z kostką



$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{6}2\left(0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2\right)} = \sqrt{\frac{0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8{,}75}{3}} = \sqrt{2{,}916666} = \boxed{1{,}70783}$$

Różnica tylko 1,4%

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} = \boxed{1{,}73205}$$

Rozkład trójkątny

Rzadziej wykorzystywane są właściwości rozkładu **trójkątnego** o szerokości 2a, dla którego odchylenie standardowe σ wynosi:

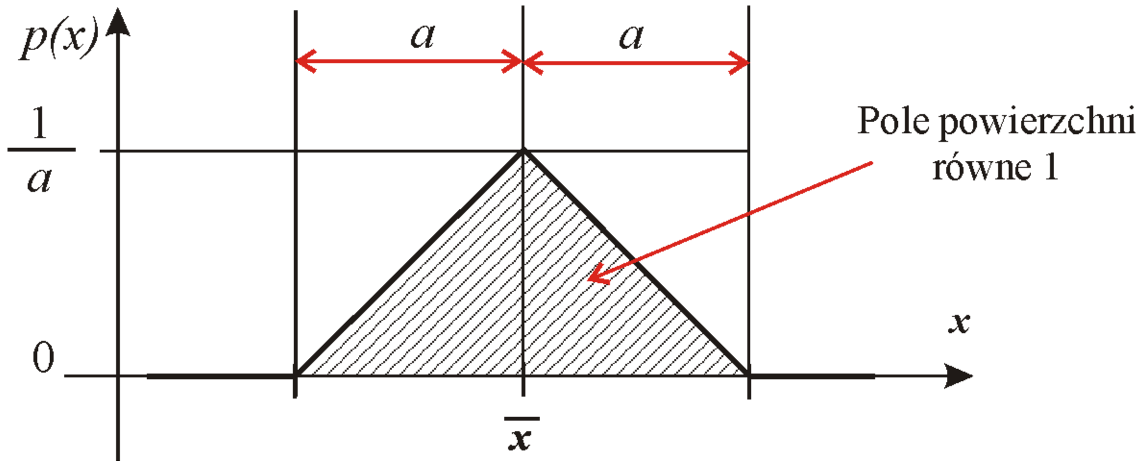
$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Dla rozkładu trójkątnego prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale o szerokości 2a wokół wartości oczekiwanej μ jest równe **100 %.**

Rozkład trójkątny jest stosowany do opisu **błędów kwantowania częstościomierzy cyfrowych**.

Rozkład trójkątny – funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$\Pr\left(\bar{x} - a < x < \bar{x} + a\right) = 100\%$$



$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Rozkłady – podsumowanie

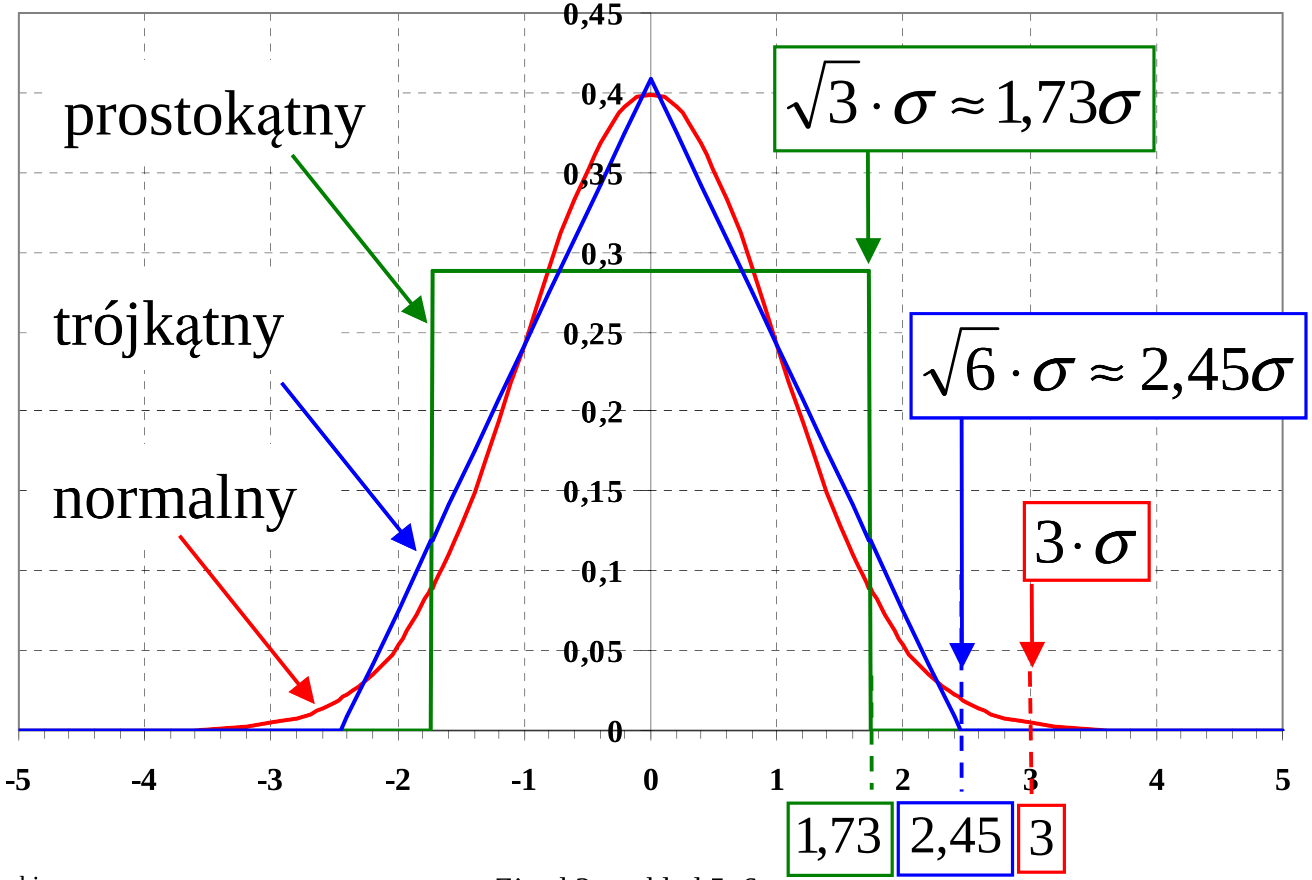
Połowa szerokości przedziału ufności dla różnych rozkładów

Rozkład	Poziom ufności			
	68,27 %	95,45 %	99,74 %	100 %
prostokątny	-	-	-	$\sqrt{3}\cdot\sigma \boxed{\approx 1{,}73\sigma}$
trójkątny	-	-	-	$\sqrt{6}\cdot\sigma \boxed{\approx 2{,}45\sigma}$
normalny	$1\cdot\sigma$	$2\cdot\sigma$	$\boxed{3\cdot\sigma}$	∞

Porównanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa

Przedziały ufności ≈100% dla rozkładów o tych samych parametrach

$$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$$



Centralne twierdzenie graniczne

Jeżeli zmienna losowa x jest sumą wielu zmiennych losowych z_i, to rozkład zmiennej losowej x zbliża się do rozkładu normalnego w miarę zwiększania się liczby sumowanych zmiennych z_i .

Wniosek:

Ponieważ na błąd pomiaru ma wpływ jednocześnie bardzo wiele różnych czynników, których oddziaływania sumują się, dlatego rozkład normalny dobrze opisuje właściwości statystyczne błędów.

Histogram

Parametry obserwacji z próby wygodnie jest również przedstawić w postaci **histogramu**, którego kształt zbliża się do kształtu rozkładu w populacji.

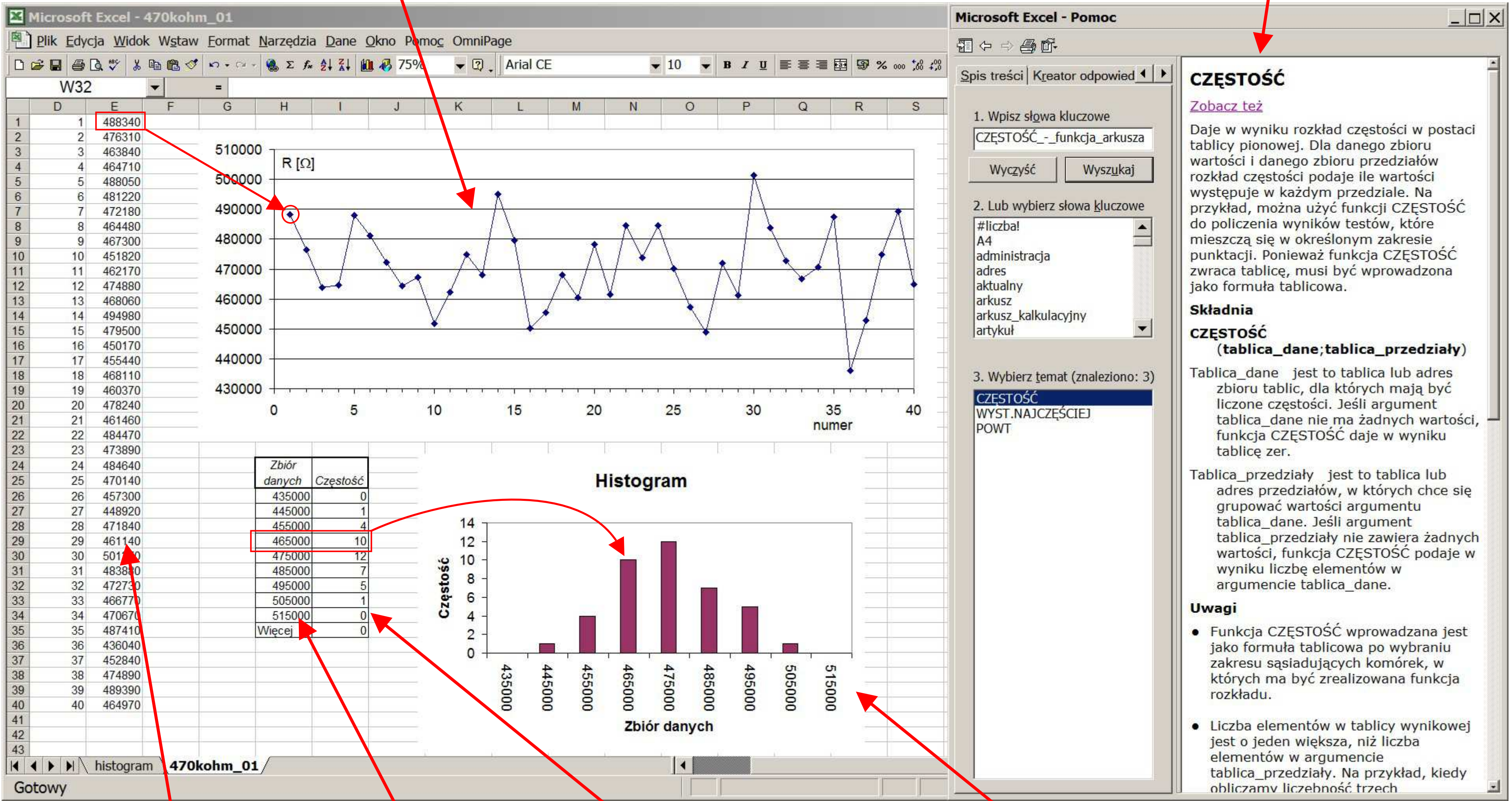
Histogram z danych eksperymentalnych opracowuje się obliczając **częstość** występowania wyników o wartościach należących do określonych **przedziałów o równej szerokości**. Histogram musi obejmować wszystkie wartości, a liczbę przedziałów wybiera się tak, aby można było ocenić kształt rozkładu. Histogram można wygenerować automatycznie za pomocą programów komputerowych, np.: Excel.

UWAGA: nie wolno mylić słów **częstość** i **częstotliwość** !!!

Histogram w Excelu

Wykres z wyników pomiarów

Opis formuły tablicowej CZĘSTOŚĆ



Wyniki 40 pomiarów

Granice przedziałów

częstość

Histogram – wykres częstości wystąpienia różnych wartości

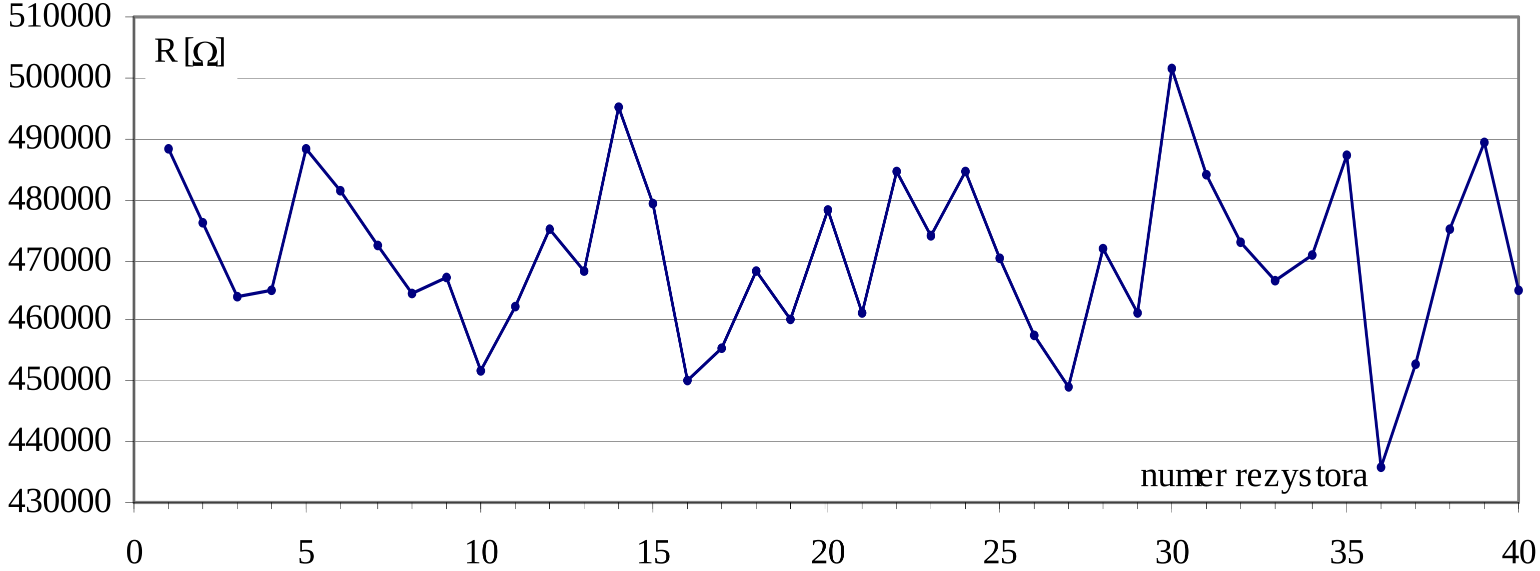
Histogram – przykład z serią rezystorów

Multimetrem BM859CF wykonano pomiary rezystancji kolejno 40 sztuk oporników metalizowanych typu MŁT o wartości 470 kΩ i tolerancji ± 10 % pochodzących z jednej serii produkcyjnej. Multimetr ustawiono na zakres 500,00 kΩ (ze standardową rozdzielczością 4 $^4/_5$ cyfry). Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci wykresu poniżej. Kolejne punkty połączono ze sobą odcinkami. Wyniki pomiarów **różnią się wyraźnie między sobą**, co oznacza występowanie rozrzutu parametrów oporników w serii produkcyjnej.

Celem pomiarów jest oszacowanie parametrów statystycznych z **próby** rezystorów i ocenienie,

czy seria produkcyjna spełnia wymagania

deklarowanej przez producenta tolerancji ± 10 % ?



Koniec wykładu 5 !!! Koniec wykładu 5 !!! Koniec wykładu 5 !!! Koniec wykładu 5 !!! Koniec wykładu 5 !!! Koniec wykładu 5 !!!

Histogram – przykład z serią rezystorów c.d.

Na podstawie wyników pomiarów **obliczono**:

- **wartość średnią** $\overline{X}$: =470621 Ω

- **odchylenie standardowe pojedynczego wyniku**: $s(x)$=13763,71 Ω ≈ 13800 Ω

W rozpatrywanym przypadku należy ustalić, czy zaobserwowany rozrzut wartości rezystancji może upoważniać do stwierdzenia, że seria oporników z których pochodzi badana próba spełnia wymogi tolerancji.

Zakładając, że wartości rezystancji podlegają rozkładowi normalnemu można przyjąć, iż prawdopodobieństwo, że dowolny opornik będzie miał rezystancję z zakresu:

od μ - 3σ do μ + 3σ (przedział trzy sigma) jest równe 99,74 %, a więc bardzo bliskie 100 %.

Najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej μ jest **wartość średnia** $\overline{X}$, a najlepszym estymatorem odchylenia standardowego σ jest **odchylenie standardowe z próby** $s(x_i)$.

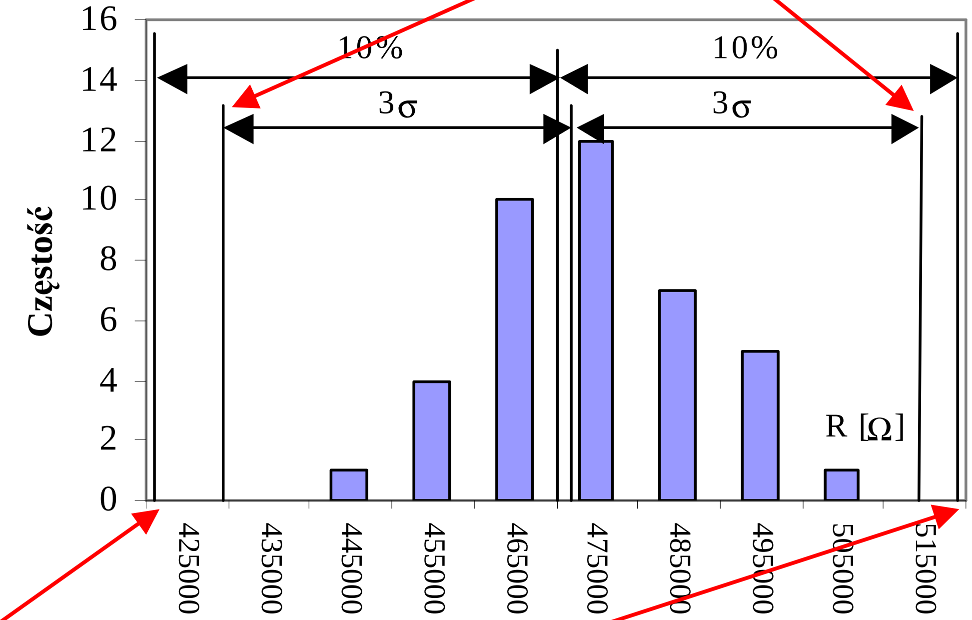
Obliczamy połowę szerokości przedziału trzy sigma:

$$3\sigma = 3s(x) = 41400\ \Omega \approx 42\ \mathrm{k}\Omega$$

Wynik zaokrąglono w górę do 2 cyfr znaczących aby uniknąć zbyt dużego zaokrąglenia powyżej 20 % (czyli do 50 kΩ).

Histogram – przykład z serią rezystorów c.d.

Podsumowanie: rezystancje badanych oporników podlegają rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej 471 kΩ i odchyleniu standardowym 13,8 kΩ. Oznacza to, że **dowolny opornik z serii produkcyjnej** posiada rezystancję z zakresu od 429 kΩ do 513 kΩ prawdopodobieństwem 99,74 % (przedział 3σ).



Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci **histogramu**. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu. Wnioski są następujące:

1.Wszystkie zmierzone rezystory mają rezystancję mieszczącą się w zakresie 470 kΩ ± 10 %, czyli od 423 kΩ do 517 kΩ.

2.Również estymowany przedział 3σ w całości mieści się granicach określonych tą tolerancją.

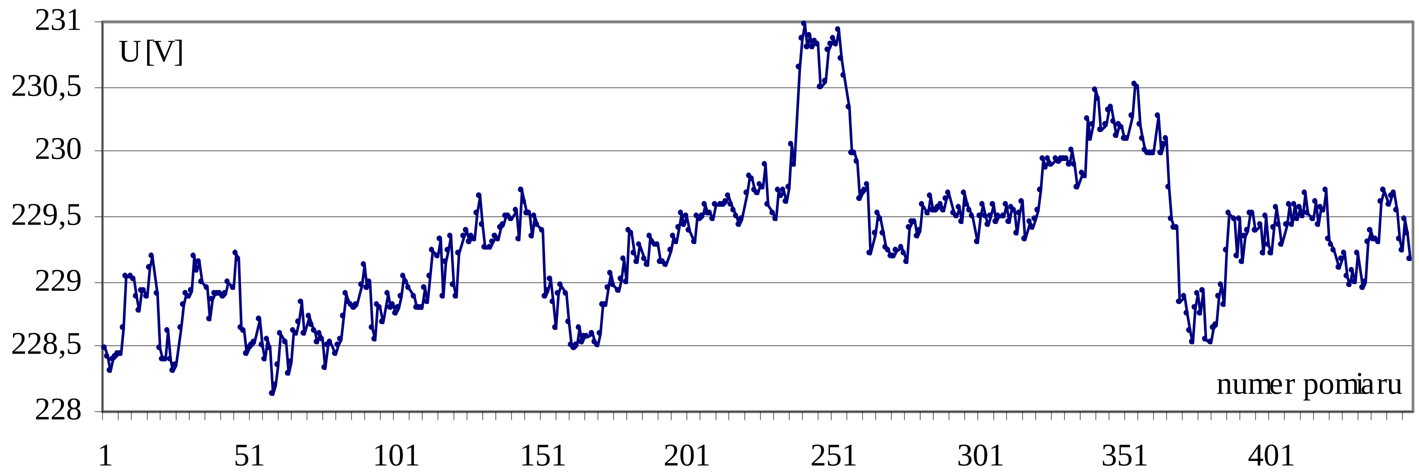
Histogram – przykład z napięciem w sieci energetycznej

Multimetrem BM859CF wykonano serię 450 pomiarów napięcia w sieci energetycznej. Pomiary trwały 10 minut. Multimetr ustawiono na zakres 500,00 V (ze standardową rozdzielczością 4 $^4/_5$ cyfry). Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci wykresu poniżej. Kolejne punkty połączono ze sobą odcinkami. Wyniki pomiarów **różnią się wyraźnie między sobą**, co oznacza występowanie przypadkowych zmian wartości napięcia w sieci.

Celem pomiarów jest oszacowanie parametrów statystycznych wartości napięć i ocenienie,

czy napięcie spełnia wymagania przepisów ?

W Polsce zgodnie z obowiązującymi przepisami w sieci energetycznej *nn* średnia wartość skuteczna napięcia fazowego mierzona w ciągu 10 minut (w normalnych warunkach pracy, wyłączając przerwy w zasilaniu) powinna mieścić się w przedziale 230V ±10%, dla **95%** pomiarów w okresie każdego tygodnia.

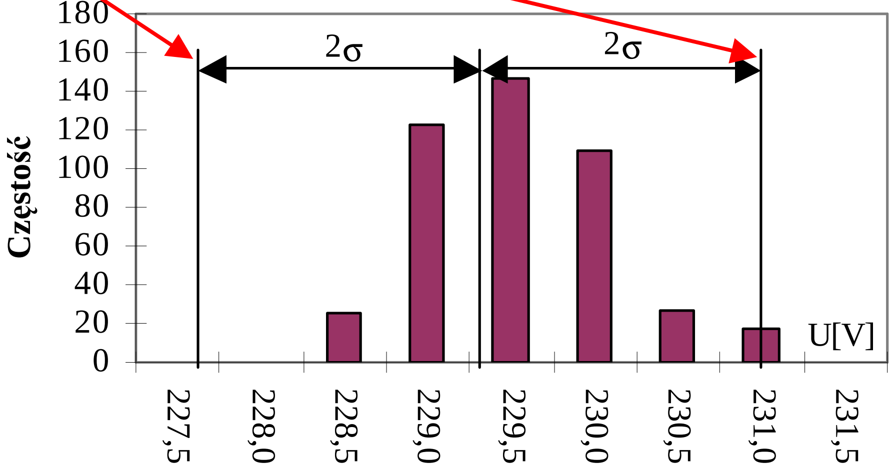


Histogram – przykład z napięciem w sieci energetycznej c.d.

Niepewność rozszerzoną obliczono zakładając rozkład normalny i poziom ufności **95,6%** (współczynnik rozszerzenia k=2). Ostatecznie wynik pomiaru średniej wartości skutecznej napięcia w czasie 10 minut można zapisać następująco:

U=229,3 V ± 1,7 V gdzie liczba za znakiem ± jest wartością niepewności rozszerzonej obliczonej dla współczynnika rozszerzenia k=2 opartego na rozkładzie normalnym i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na **95,6%**

207 V



253 V

Wyniki pomiarów w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu. Wszystkie wyniki pomiarów napięcia mieszczącą się w zakresie 230 V ± 10 %, czyli od 207 V do 253 V. Również estymowany przedział 2σ w całości mieści się granicach określonych tą tolerancją z dużym zapasem. Można więc stwierdzić, że w badanym okresie 10 minut **napięcie w sieci spełniało wymagania przepisów**.

Niepewność pomiaru

Niepewność pomiaru *(ang. Uncertainty* [Λn`sə:tntı]*)* jest zdefiniowana jako parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący **rozrzut wartości**, które można w **uzasadniony** sposób przypisać wielkości mierzonej.

Uwagi:

1. Podana definicja jest więc dość ogólna, nieprecyzyjna.
2. W praktyce stosowana jest niepewność standardowa.

Niepewność standardowa zdefiniowana jest jako niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie **odchylenia standardowego**.

Metody obliczania niepewności

Wyróżnia się **dwie metody** obliczania niepewności:

metoda typu **A** i metoda typu **B**.

Metoda typu A jest to metoda obliczania niepewności $\boldsymbol{u_i}$ drogą **analizy statystycznej** serii pojedynczych obserwacji.

Metoda typu B jest to metoda obliczania niepewności $\boldsymbol{u_j}$ sposobami **innymi** niż analiza serii obserwacji.

Zalecane oznaczenia

Niepewność standardowa złożona

Niepewność standardowa złożona (łączna, całkowita) u_c jest obliczana jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności składowych, obliczonych odpowiednio metodą A i (lub) B.

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2}$$

Uwaga: poprawnie jest mówić: *„**składanie** niepewności”*, a nie: *„sumowanie niepewności”*.

Inne spotykane określenia:

Suma geometryczna (długość wektora będącego sumą dwóch wektorów prostopadłych do siebie)

ang. Root – sum – of – squares

Niepewność rozszerzona

Niepewność rozszerzona U określa przedział wokół wyniku pomiaru, który obejmuje dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Współczynnik rozszerzenia k jest to współczynnik liczbowy zastosowany jako mnożnik złożonej niepewności standardowej u_c w celu otrzymania niepewności rozszerzonej U.

$$U = k \cdot u_c$$

Współczynnik rozszerzenia

Zwykle wartość współczynnika k przyjmuje się z przedziału

od 2 do 3

tak, aby dla przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa uzyskać założoną szerokość przedziału niepewności z akceptowalnym poziomem ufności.

Najczęściej przyjmuje się:

rozkład normalny (dla długich serii pomiarów),

rozkład t-Studenta (dla krótkich serii) oraz

rozkład prostokątny (wykorzystując **błąd graniczny miernika** podany przez producenta).

Procedura wyznaczania niepewności

Przedstawiona procedura wyznaczania niepewności ma zastosowanie:

dla pomiarów bezpośrednich,

przy dużej liczby pomiarów.

Ocena niepewności pomiarów pośrednich, dla małej liczby pomiarów oraz inne bardziej zaawansowane przypadki są szczegółowo opisane w Przewodniku [1] i Nocie Technicznej [2].

Wyznaczanie niepewności w 5 krokach

Procedura wyznaczania niepewności zawiera się w 5 krokach:

1. wyznaczanie niepewności u_i metodą typu A ,
2. wyznaczanie niepewności u_j metodą typu B ,
3. wyznaczanie niepewności złożonej u_c ,
4. wyznaczanie niepewności rozszerzonej U ,
5. zaokrąglanie wyników obliczeń i podawanie wyniku końcowego.

Krok 1 - wyznaczanie niepewności u_i metodą typu A

W kroku pierwszym wyznaczana jest niepewność u_i metodą typu A na podstawie wyników x_i serii n pomiarów:

odchylenie standardowe pojedynczego wyniku

$$u_i = s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

odchylenie standardowe wartości średniej w serii

pierwiastek z liczby pomiarów n

Krok 2 - wyznaczanie niepewności u_j metodą typu B

W kroku drugim wyznaczana jest niepewność u_j metodą typu B na podstawie:

- danych technicznych przyrządów (np. z klasy dokładności),
- danych dostępnych z literatury (np. rozkład błędów kwantowania),
- z wcześniejszych wyników pomiarów (np. z innego laboratorium).

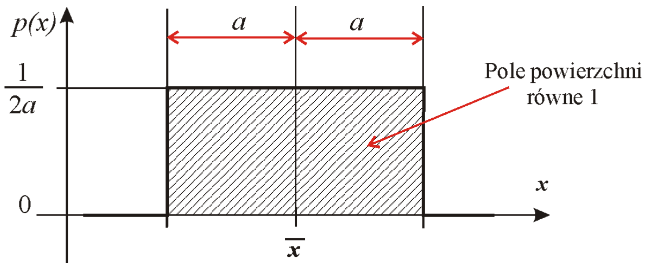
Najczęściej korzystamy z danych technicznych przyrządów, tzn.: z **klasy dokładności** (mierniki analogowe) lub z innego sposobu podawania **błędów granicznych** przyrządu pomiarowego (mierniki cyfrowe)

Krok 2 - wyznaczanie niepewności u_j z klasy miernika

Niepewność pomiaru typu B można określić na podstawie podanego przez producenta **błędu granicznego** miernika.

Ponieważ producent gwarantuje, że 100% błędów miernika jest mniejszych od określonego dla niego błędu granicznego, przyjmuje się **prostokątny rozkład błędów** popełnianych przez miernik, o szerokości **2*a* równej 2Δ_{gr}**.

Uwzględniając znane właściwości rozkładu prostokątnego wyznacza się w takim przypadku niepewność typu B równe odchyleniu standardowemu dla rozkładu prostokątnego:



$$u_j = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}}$$

Krok 2 – obliczanie błędu granicznego Δ_{gr}

Dla mierników analogowych:

Najczęstszy sposób: klasa wyrażona w procentach zakresu

$$\Delta_{gr}\, x = \frac{kl \cdot x_{zak}}{100}$$

Dla mierników cyfrowych:

Pierwszy sposób: *a*% z odczytu (ang. *rdg – reading*) + *b*% z zakresu (ang. *FSR – Full Scale Range*)

$$\Delta_{gr} x = \frac{a \cdot rdg}{100} + \frac{b \cdot FSR}{100}$$

Drugi sposób: *a*% z odczytu (ang. *rdg – reading*) + *b* najmniej znaczących cyfr *d* (ang. *d – digit*)

$$\Delta_{gr} x = \frac{a \cdot rdg}{100} + b \cdot d$$

Krok 3 - wyznaczanie niepewności złożonej u_c

W kroku trzecim wyznaczana jest niepewności złożona (łączna całkowita) u_c według metody „pierwiastek z sumy kwadratów” :

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2}$$

Operację tę nazywamy **składaniem niepewności.**

Krok 4 - wyznaczanie niepewności rozszerzonej U

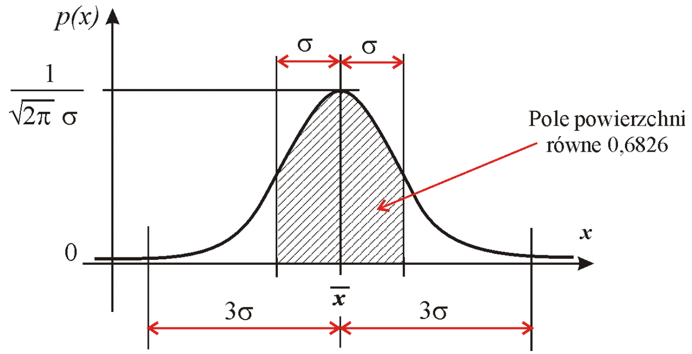
W kroku czwartym wyznaczana jest niepewność rozszerzona U jako iloczyn niepewności całkowitej u_c i współczynnika rozszerzenia k:

$$U = k \cdot u_c$$

Wartość współczynnika k przyjmuje się z zakresu od 2 do 3, zależnie od przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa i zakładanego poziomu ufności. Praktycznie najczęściej przyjmuje się **rozkład normalny**, wtedy:

***k*=2** dla poziomu ufności p=**95,46 %,**

***k*=3** dla poziomu ufności p=**99,74 %.**



Krok 5 - zaokrąglanie obliczeń i podawanie wyniku

W kroku piątym zaokrąglane są wyniki obliczeń i podawany jest końcowy wynik pomiaru wraz z niepewnością.

Podstawowa zasada: Liczba cyfr znaczących zapisanych w wyniku pomiaru powinna odpowiadać jego **rzeczywistej dokładności**.

Często popełnianym **błędem jest** podawanie wyników pomiarów oraz ich niepewności **zbyt dokładnie**, tzn. z nadmierną liczbą cyfr znaczących.

Krok 5 – zalecenia przy obliczaniu i zaokrąglaniu wyników

1.**Niepewności** (błędy) obliczamy z trzema cyframi znaczącymi i zaokrąglamy **zawsze w górę** do jednej cyfry znaczącej lub do dwóch cyfr jeśli zaokrąglenie przekraczałoby 20%.

2.**Wynik** pomiaru **obliczamy z taką samą liczbą cyfr** znaczących, jaką posiadają wyniki odczytane z przyrządów pomiarowych, jeśli obliczamy średnią z powyżej 10 pomiarów uwzględniamy **dodatkowo jedną cyfrę** znaczącą i powyżej 100 pomiarów uwzględniamy **dodatkowo dwie cyfry** znaczące.

3.**Wynik** pomiaru **zaokrąglamy do tego samego miejsca**, do którego zaokrąglono wynik obliczeń niepewności, tzn. ostatnia cyfra znacząca w wyniku pomiaru i jego niepewności powinna występować na tej samej pozycji dziesiętnej.

4.Reguła zaokrąglania powinna być **symetryczna**, tzn. średni błąd zaokrąglania powinien dążyć do zera.

Krok 5 – reguła symetrycznego zaokrąglania

Zasady zaokrąglania (zapewniające **symetryczne** zaokrąglanie):

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **mniejsza od 5** to zaokrąglamy **w dół**,

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **większa od 5** to zaokrąglamy **w górę**,

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **równa 5** i następne cyfry z jej prawej strony **nie są zerami** to zaokrąglamy **w górę**,

- jeśli pierwsza odrzucana cyfra jest **równa 5** i następne cyfry z prawej jej strony **są zerami** to zaokrąglamy **w górę lub w dół** tak, aby ostatnia pozostawiona cyfra była cyfrą **parzystą**.

Krok 5 – przykłady symetrycznego zaokrąglania

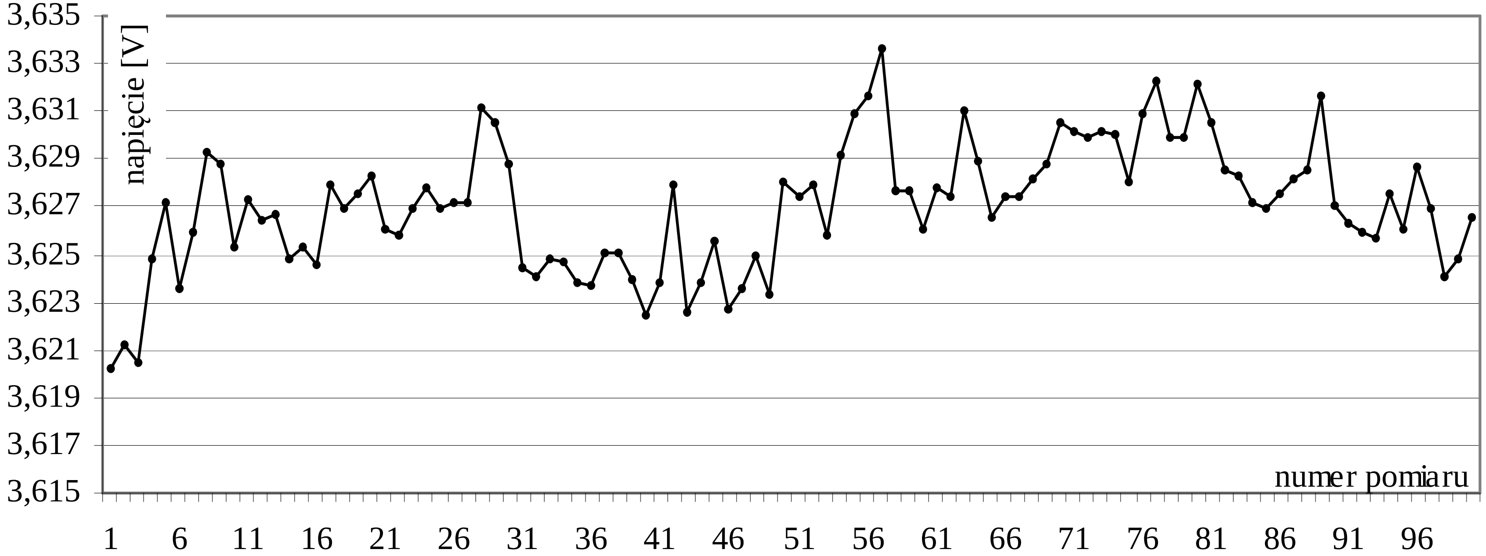
W zapisie wyniku obliczeń zaleca się stosowanie odpowiednich przedrostków (kilo-, mega-, mili-, mikro- itp.) i wielokrotności potęgowe (tzw. zapis naukowy) tak, aby niepewnością obarczone były jedynie miejsca dziesiętne i setne.

Przykłady prawidłowego zaokrąglania:

m=(32,55±0,734) g	zaokrąglamy do m=(32,6±0,8) g ,
C=(2453±55) nF	zaokrąglamy do C=(2,45±0,06) μF ,
I=(43,284±1,23) mA	zaokrąglamy do I=(43,3±1,3) mA ,
P=(4250±75) W	zaokrąglamy do P=(4,25±0,08) kW ,
R=(237465±127) Ω	zaokrąglamy do R=(237,46±0,13) kΩ .

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Multimetrem BM859CF wykonano w krótkich odstępach czasu serię 100 pomiarów napięcia baterii 3R12 (częściowo rozładowanej). Multimetr ustawiono na zakres 5.000 00 V (z rozdzielczością 5 $^{4}/_{5}$ cyfry). Wyniki przedstawiono w postaci wykresu. Ze względu na wpływ środowiska, zakłóceń, niestałości parametrów woltomierza i innych często nieznanych przyczyn wyniki pomiarów różnią się między sobą, co oznacza występowanie błędów przypadkowych.



Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Na podstawie wyników pomiarów obliczono:

- wartość średnią: $\bar{x} = \boxed{3{,}62735}\boxed{02}$ V

- odchylenie standardowe pojedynczego wyniku: $s(x)=0{,}0026457$ V

- odchylenie standardowe średniej: $s(\bar{x})=0{,}00026457$ V

Z danych miernika obliczono jego błąd graniczny Δ_{gr}:

$$\Delta_{gr} = 0{,}02\% \cdot 3{,}63\,\mathrm{V} + 2 \cdot 10\,\mu\mathrm{V} = 7{,}26 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V} + 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{V} = \boxed{7{,}46} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}$$

Wartość średnią ze 100 pomiarów obliczono z dokładnością **lepszą** niż rozdzielczość pomiarów (10µV), pozostałe parametry obliczano z trzema cyframi znaczącymi, aby można było je ostatecznie zaokrąglić do dwóch lub jednej cyfry znaczącej.

Wyznaczanie niepewności – błąd graniczny multimetru

USER'S MANUAL BM 857 , BM857CF - BRYMEN

BRIGHT PEOPLE'S CHOICE

ELECTRICAL SPECIFICATIONS

Accuracy is ±(% reading digits + number of digits) or otherwise specified, at 23°C ± 5°C & less than 75% relative humidity.
True RMS voltage & current accuracies are specified from 5 % to 100 % of range or otherwise specified. Maximum Crest Factor < 5:1 at full scale & < 10:1 at half scale, and with frequency components within the specified frequency bandwidth for non-sinusoidal waveforms.

DC Voltage

RANGE	BM859CF	BM857
	Accuracy	
500.00 mV, 5.0000V, 50.000V	0.02% + 2d	0.03% + 2d
500.00V	0.04%+2d	0.05% + 2d
1000.0V	0.05%+ 2d	0.1%+2d

NMRR: >60dB @ 50/60Hz
CMRR: >120dB @ DC, 50/60Hz, Rs=1kΩ
Input Impedance: 10MΩ, 30pF nominal
(80pF nominal for 500mV range)

Ohms

RANGE	BM859CF	BM857
	Accuracy	
500.00Ω	0.07%+10d	0.1%+6d
5.0000kΩ	0.07%+2d	0.1%+6d
50.000kΩ	0.07%+2d	0.1%+6d
500.00kΩ	0.07%+2d	0.1%+6d
5.0000MΩ	0.2%+6d	0.4%+6d
50.000MΩ	2.0%+6d	2.0%+6d

Open Circuit Voltage: < 1.3VDC (< 3VDC for 500Ω range)

$$\boxed{\Delta_{gr}} = \boxed{0{,}02\% \cdot 3{,}63\ \mathrm{V}} + \boxed{2 \cdot 10\ \mu\mathrm{V}}$$

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Obliczenie niepewności:

- niepewność typu A: $u_i = s(\bar{x}) = 0{,}000\boxed{265}$ V

- niepewność typu B:

$$u_j = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} = \frac{7{,}46 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}}{\sqrt{3}} = \boxed{4{,}31} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}$$

- niepewność złożona:

$$u_c = \sqrt{u_i^2 + u_j^2} = \sqrt{0{,}000265^2\,\mathrm{V}^2 + 0{,}000431^2\,\mathrm{V}^2} = 0{,}000\boxed{506}\ \mathrm{V}$$

- niepewność rozszerzona:

$$U = k \cdot u_c = 3 \cdot 0{,}000506\ \mathrm{V} = 0{,}00152\ \mathrm{V} \approx 0{,}0016\ \mathrm{V} = \boxed{1{,}6}\ \mathrm{mV}$$

Niepewność rozszerzoną obliczono zakładając rozkład normalny i poziom ufności 99,7% (współczynnik rozszerzenia k=3).

Wyznaczanie niepewności – przykład z pomiarem napięcia

Ostatecznie wynik pomiaru napięcia można zapisać następująco:

U=3,62$\boxed{74}$ V ± $\boxed{1,6}$mV gdzie liczba za znakiem ± jest wartością niepewności rozszerzonej obliczonej dla współczynnika rozszerzenia k=3 opartego na rozkładzie normalnym i określającym przedział o poziomie ufności szacowanym na 99,7%

Należy zwrócić uwagę na zapisanie wyniku pomiaru tak aby wynik i jego niepewność były ze sobą **zgodne pod względem liczby cyfr** znaczących.

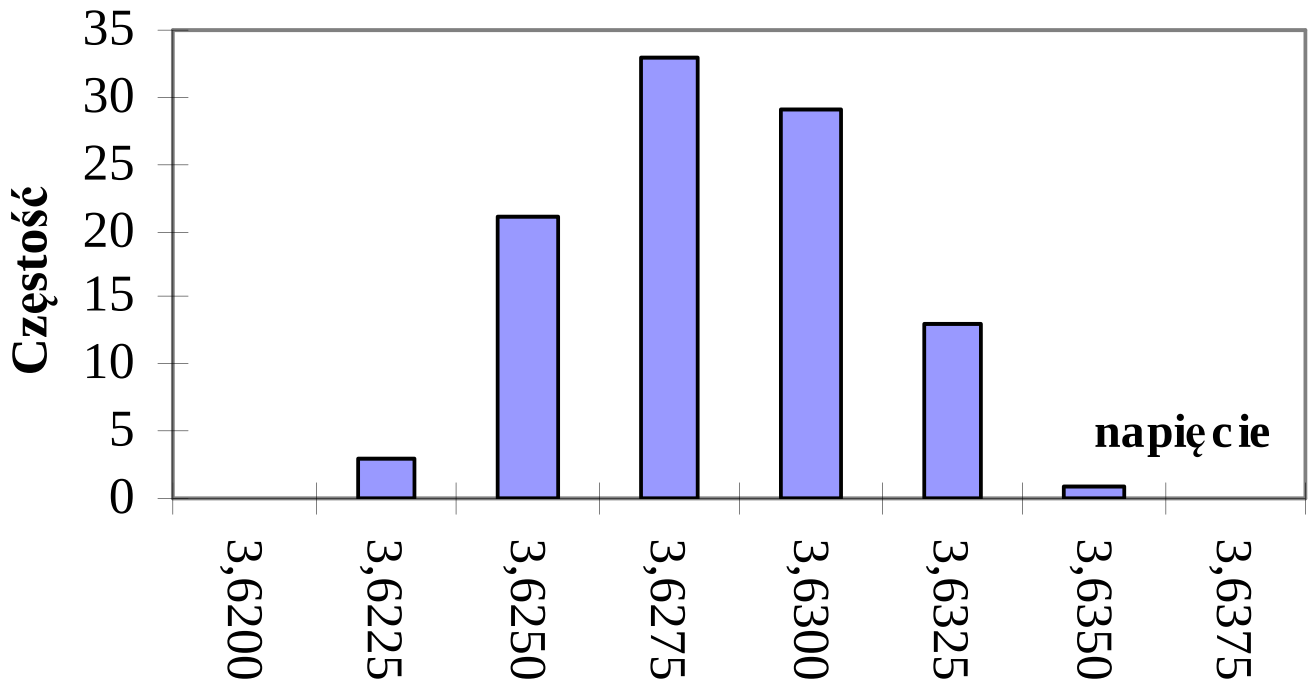
$$U=3{,}62\boxed{74}\ \mathrm{V}$$

$$0{,}00\boxed{16}\ \mathrm{V} = \boxed{1{,}6}\mathrm{mV}$$

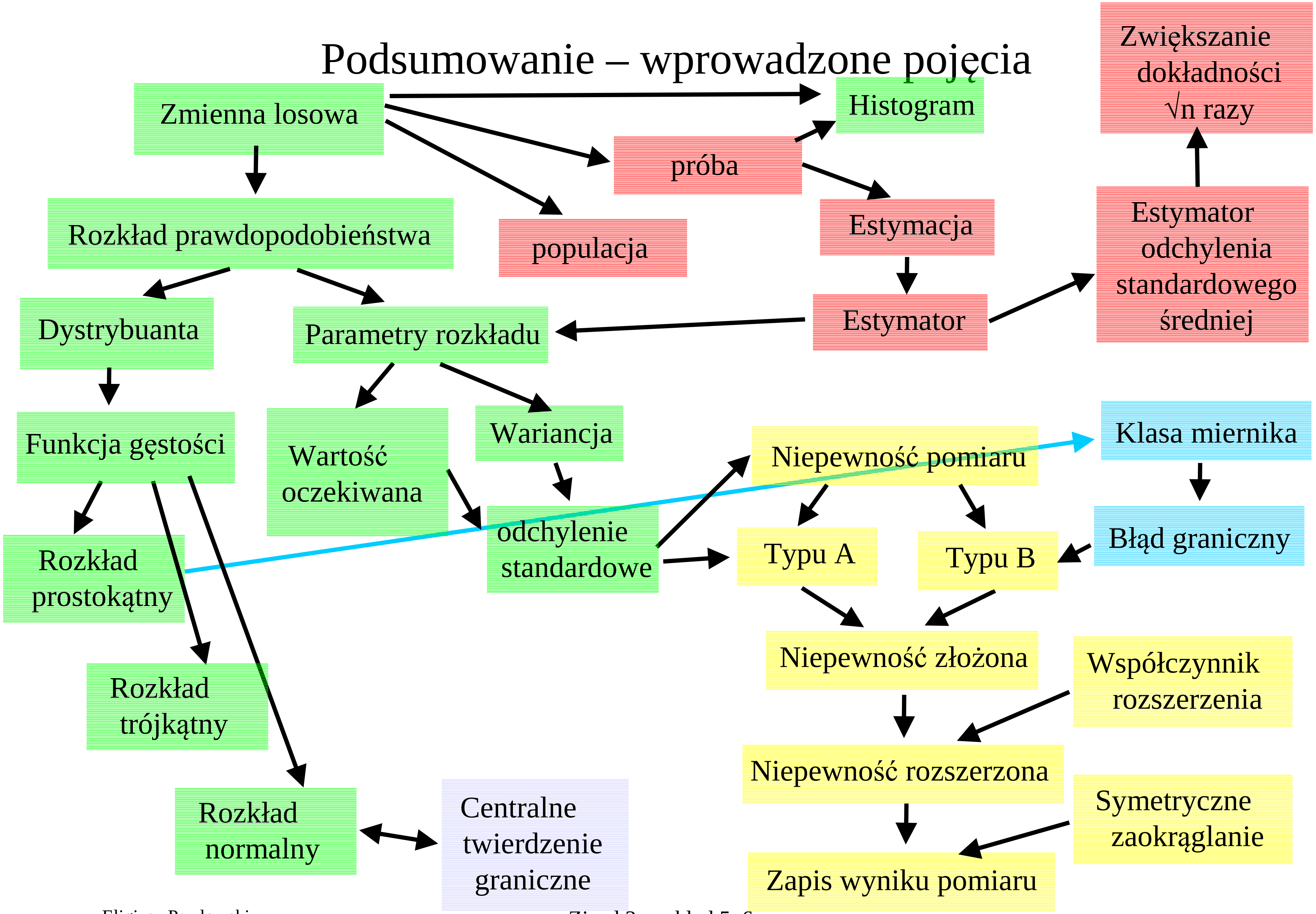
Niepewność podano z **dwoma** cyframi znaczącymi, aby uniknąć zbyt dużego zaokrąglenia powyżej 20 %.

Wyznaczanie niepewności – histogram

Wyniki pomiarów przedstawiono w postaci histogramu. Liczbę przedziałów o jednakowej szerokości dobrano tak, aby można było ocenić typ rozkładu.

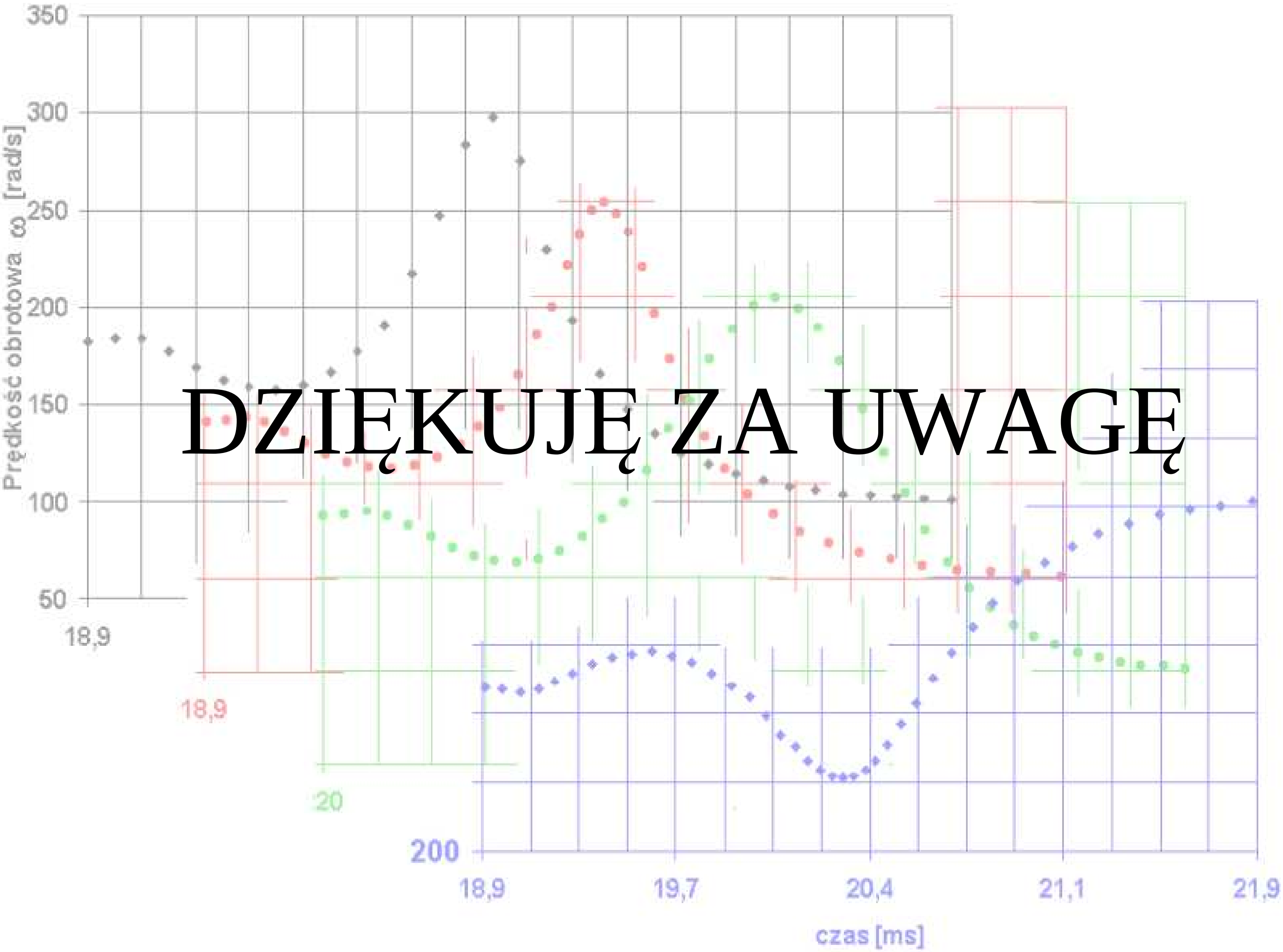


Podsumowanie – wprowadzone pojęcia



Podsumowanie

1. Przy obliczaniu niepewności mają zastosowanie metody statystyczne
2. Niepewność jest parametrem charakteryzującym rozrzut wartości
3. Niepewności obliczamy metodą A i (lub) metodą B
4. Procedura obliczania niepewności obejmuje 5 kroków
5. Wynik pomiaru podajemy wraz z niepewnością rozszerzoną
6. Ważnym zagadnieniem jest odpowiednie zaokrąglanie wyników
7. Rozrzut wyników możne przedstawić graficznie na histogramie



DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ