



Prawo autorskie

Niniejsze materiały podlegają ochronie zgodnie z **Ustawą o prawie autorskim i prawach pokrewnych** (Dz.U. 1994 nr 24 poz. 83 z późniejszymi zmianami).

Materiał te udostępniam **do celów dydaktycznych** jako materiały pomocnicze do wykładu z przedmiotu Metrologia prowadzonego dla studentów Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej. Mogą z nich również korzystać inne osoby zainteresowane metrologią. Do tego celu materiały te można **bez ograniczeń przeglądać, drukować i kopiować wyłącznie w całości**.

Wykorzystywanie tych materiałów bez zgody autora w inny sposób i do innych celów niż te, do których zostały udostępnione, **jest zabronione**.

W szczególności **niedopuszczalne jest**: usuwanie nazwiska autora, edytowanie treści, kopiowanie fragmentów i wykorzystywanie w całości lub w części do własnych publikacji.

Eligiusz Pawłowski

Uwagi dydaktyczne

Niniejsza prezentacja stanowi **tylko i wyłącznie materiały pomocnicze** do wykładu z przedmiotu Metrologia prowadzonego dla studentów Wydziału Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej. Udostępnienie studentom tej prezentacji nie zwalnia ich z konieczności sporządzania **własnych notatek z wykładów** ani też nie zastępuje **samodzielnego studiowania** obowiązujących podręczników.

Tym samym zawartość niniejszej prezentacji w szczególności **nie może być** traktowana jako zakres materiału obowiązujący na egzaminie.

Na egzaminie obowiązujący jest **zakres materiału faktycznie wyłożony podczas wykładu** oraz zawarty w odpowiadających mu fragmentach **podręczników** podanych w wykazie literatury do wykładu.

Eligiusz Pawłowski

Tematyka wykładu

Eliminacja błędów grubych

Opracowywanie wyników metodą najmniejszych kwadratów

Błędy w pomiarach pośrednich

Niepewność pomiaru w pomiarach pośrednich

Eliminacja błędów grubych

Błąd gruby (błąd nadmierny, pomyłka) – błąd wynikający z niepoprawnego wykonania pomiaru.

Możliwe przyczyny błędów grubych (przykładowe):

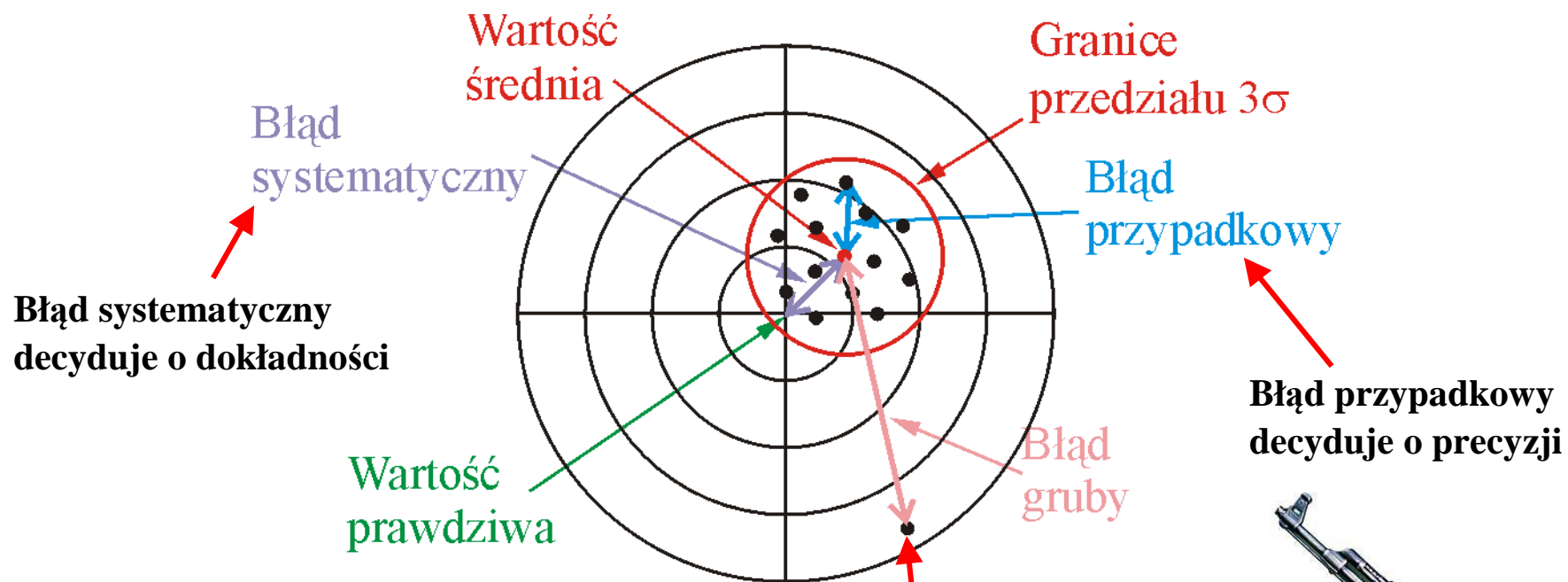
- użycie uszkodzonego, niesprawnego przyrządu,
- błędne odczytanie wskazania (np. pomyłony zakres przyrządu),
- źle połączony układ pomiarowy,
- silne zakłócenie itp.

Wyniki pomiarów obarczone **błędem grubym** nie powinny być brane pod uwagę, należy je **usuwać** ze zbioru danych.

Możliwość taką daje statystyczna obróbka wyników pomiarów.



Eliminacja błędów grubych – analogia strzelecka



Pomiary obarczone błędem grubym należy usuwać ze zbioru danych !!!



Eliminacja błędów grubych – rozkład normalny

Centralne Twierdzenie Graniczne uzasadnia stosowanie do analizy danych eksperymentalnych właściwości **rozkładu normalnego**.

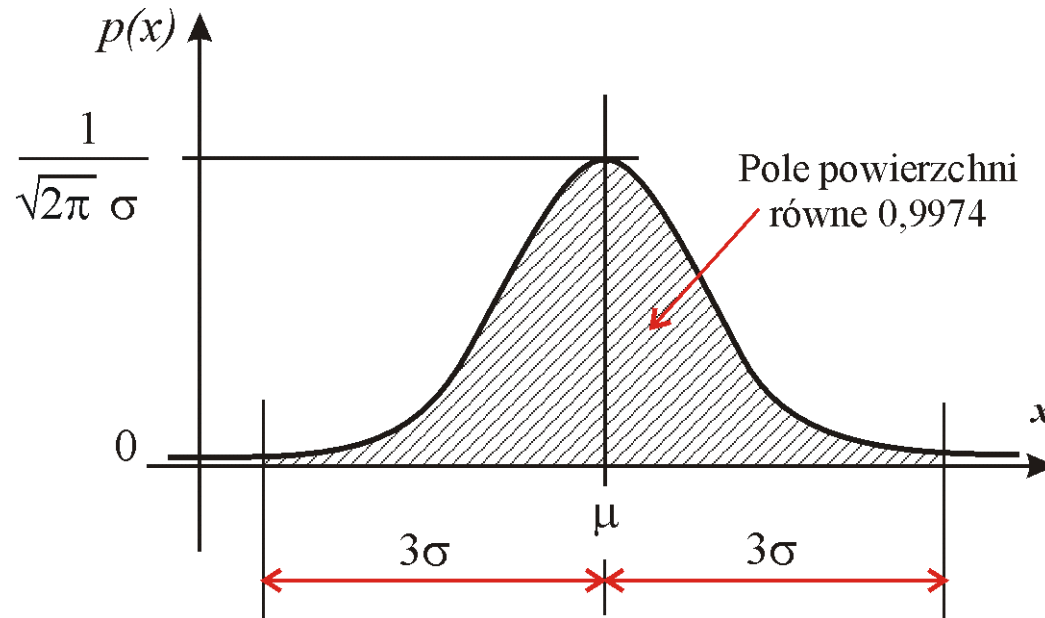
Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Dla rozkładu normalnego, prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej znajdzie się w przedziale:

Z tego przedziału od $\mu - \sigma$ do $\mu + \sigma$ jest równe 68,26 %,
korzystamy w od $\mu - 2\sigma$ do $\mu + 2\sigma$ jest równe 95,46 %,
praktyce od $\mu - 3\sigma$ do $\mu + 3\sigma$ jest równe 99,74 %.
najczęściej

Eliminacja błędów grubych – przedział 3 sigmowy



$$\Pr(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 99.74\%$$

Wniosek: należy wyznaczyć (estymować) parametry rozkładu na podstawie danych z eksperymentu pomiarowego i wyznaczyć „**przedział trzy sigmowy**”.

Eliminacja błędów grubych – estymatory μ i σ

Najlepszym **estymatorem wartości oczekiwanej** μ dla populacji, wyznaczanym na podstawie n - elementowej próby x_1, x_2, \dots, x_n , jest

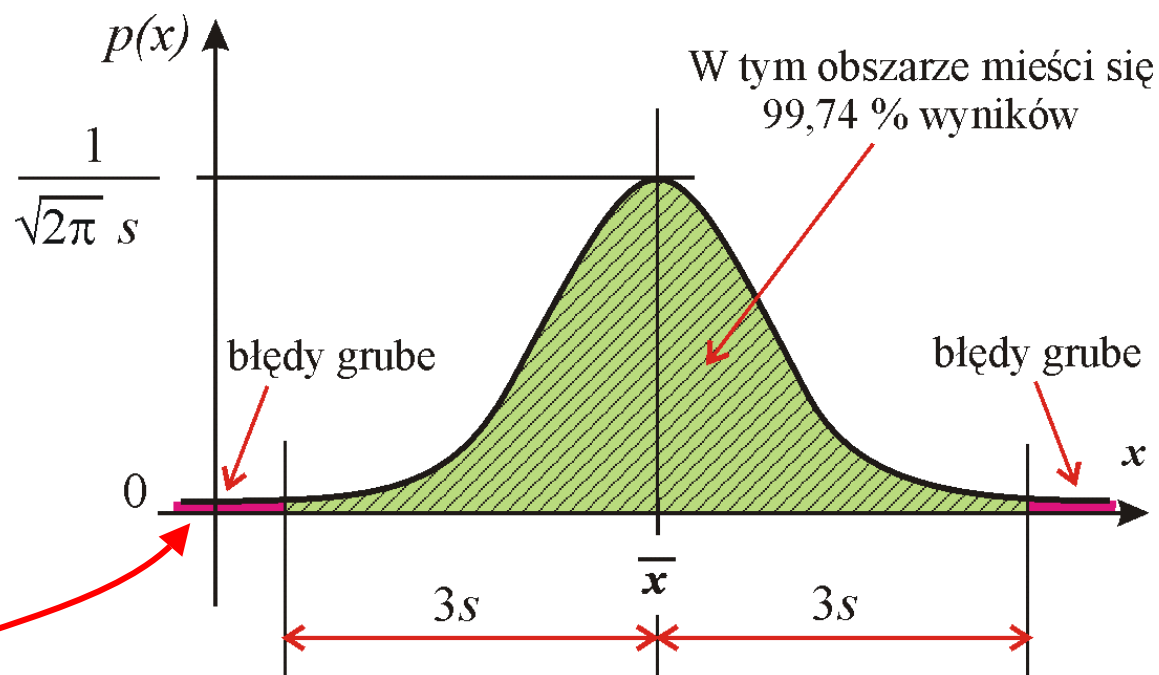
wartość średnia \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Najlepszym **estymatorem odchylenia standardowego** σ dla populacji jest **odchylenie standardowe z próby s:**

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Eliminacja błędów grubych – przedział $3s$



$$\Pr(\bar{x} - 3s < x < \bar{x} + 3s) = 99.74\%$$

Wniosek: mniej niż 3 pomiary na 1000 wykonanych może leżeć poza przedziałem o szerokości $\pm 3s$ wokół wartości średniej \bar{x} !

W praktyce możemy więc takie wyniki odrzucić jako obarczone błędem grubym.

Eliminacja błędów grubych – postępowanie

Kolejność postępowania:

- wykonujemy serię n pomiarów, otrzymujemy wyniki x_1, x_2, \dots, x_n ,
- obliczamy wartość średnią \bar{x} (estymujemy wartość oczekiwaną μ),
- obliczamy odchylenie standardowe z próby s (estymujemy σ),
- obliczamy granice przedziału $\bar{x} \pm 3s$ (trzy sigma),
- sprawdzamy, czy wszystkie wyniki x_i mieszczą się w przedziale:

$$\bar{x} - 3s < x_i < \bar{x} + 3s$$

lub (wygodniej): $|x_i - \bar{x}| < 3s$, czyli: $3s - |x_i - \bar{x}| > 0$

- odrzucaamy wyniki x_i które nie mieszczą się w przedziale $\bar{x} \pm 3s$,
- powtarzamy procedurę od początku**, aż wszystkie wyniki będą się mieściły w przedziale $\bar{x} \pm 3s$.

Eliminacja błędów grubych – przykład Excel

Microsoft Excel - wyklad_ME_EZ-bledy_grube.xls

Plik Edycja Widok Wstaw Format Narzędzia Dane Okno Pomoc OmniPage

K21 =

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		lp	xi					
3		1	1,1000					
4		2	1,1200					
5		3	1,1500					
6		4	1,0700					
7		5	1,0600					
8		6	1,2100					
9		7	1,0900					
10		8	1,1500					
11		9	1,1100					
12		10	1,1700					
13		11	1,8000					
14		12	1,0400					
15		13	1,1800					
16								
17		średnia xsr	1,1731					
18								
19								
20								

wykonujemy serię np. 13 pomiarów, zapisujemy wyniki x_1, x_2, \dots, x_{13} do tabeli

Obliczamy wartość średnią \bar{x}

Eliminacja błędów grubych – przykład c.d.

Microsoft Excel - wyklad_ME_EZ-bledy_grube.xls

Plik Edycja Widok Wstaw Format Narzędzia Dane Okno Pomoc OmniPage

ODCH.STANDA... \times \checkmark = =ODCH.STANDARDOWE(C3:C15)

ODCH.STANDARDOWE

Liczba1 C3:C15 = {1,1\1,12\1,15\1,07

Liczba2 = liczbowe

= 0,194866818

Dokonyuje oszacowania odchylenia standardowego dla podanej próbki (pomija wartości logiczne i tekstowe w próbce).

Liczba1: liczba1;liczba2;... - od 1 do 30 liczb odpowiadających próbce populacji, mogą być to liczby lub odwołania zawierające liczby.

Wynik formuły = 0,1949

OK Anuluj

11	9	1,1100
12	10	1,1700
13	11	1,8000
14	12	1,0400
15	13	1,1800
16		
17	średnia	1,1731
18	odch.st.	0,5846
19	3xodch.st.	
20		

obliczamy odchylenie standardowe z próby s

obliczamy $3s$

Eliminacja błędów grubych – przykład c.d.

Microsoft Excel - wykład_ME_EZ-bledy_grube.xls

	A	B	C	D	E	F
1						
2		lp	xi	mod.(xi-xsr)	warunek 3s?	
3		1	1,1000	0,0731	0,5115	
4		2	1,1200	0,0531	0,5315	
5		3	1,1500	0,0231	0,5615	
6		4	1,0700	0,1031	0,4815	
7		5	1,0600	0,1131	0,4715	
8		6	1,2100	0,0369	0,5477	
9		7	1,0900	0,0831	0,5015	
10		8	1,1500	0,0231	0,5615	
11		9	1,1100	0,0631	0,5215	
12		10	1,1700	0,0031	0,5815	
13		11	1,8000	0,6269	-0,0423	
14		12	1,0400	0,1331	0,4515	
15		13	1,1800	0,0069	0,5777	
16						
17		średnia xsr	1,1731			
18		odch.st.	0,1949			
19		3xodch.st.	0,5846			
20						

Obliczamy

$$|x_i - \bar{x}|$$

Obliczamy

$$3s - |x_i - \bar{x}|$$

odrzucaamy wynik x_{11}
który nie mieści się w przedziale $\bar{x} \pm 3s$,

Eliminacja błędów grubych – przykład c.d.

Microsoft Excel - wyklad_ME_EZ-bledy_grube.xls

	A	B	C	D	E	F
1						
2		lp	xi	mod.(xi-xsr)	warunek 3s?	
3		1	1,1000	0,0208	0,1356	
4		2	1,1200	0,0008	0,1556	
5		3	1,1500	0,0292	0,1272	
6		4	1,0700	0,0508	0,1056	
7		5	1,0600	0,0608	0,0956	
8		6	1,2100	0,0892	0,0672	
9		7	1,0900	0,0308	0,1256	
10		8	1,1500	0,0292	0,1272	
11		9	1,1100	0,0108	0,1456	
12		10	1,1700	0,0492	0,1072	
13		11	1,0400	0,0808	0,0756	
14		12	1,1800	0,0592	0,0972	
15						
16	średnia xsr		1,1208			
17	odch.st.		0,0521			
18	3xodch.st.		0,1564			
19						
20						

Ponownie
obliczamy

$$|x_i - \bar{x}|$$

Ponownie
obliczamy

$$3s - |x_i - \bar{x}|$$

Ponownie
sprawdzamy,
wszystkie wyniki x_i
mieszczą się w
przedziale $\bar{x} \pm 3s$,

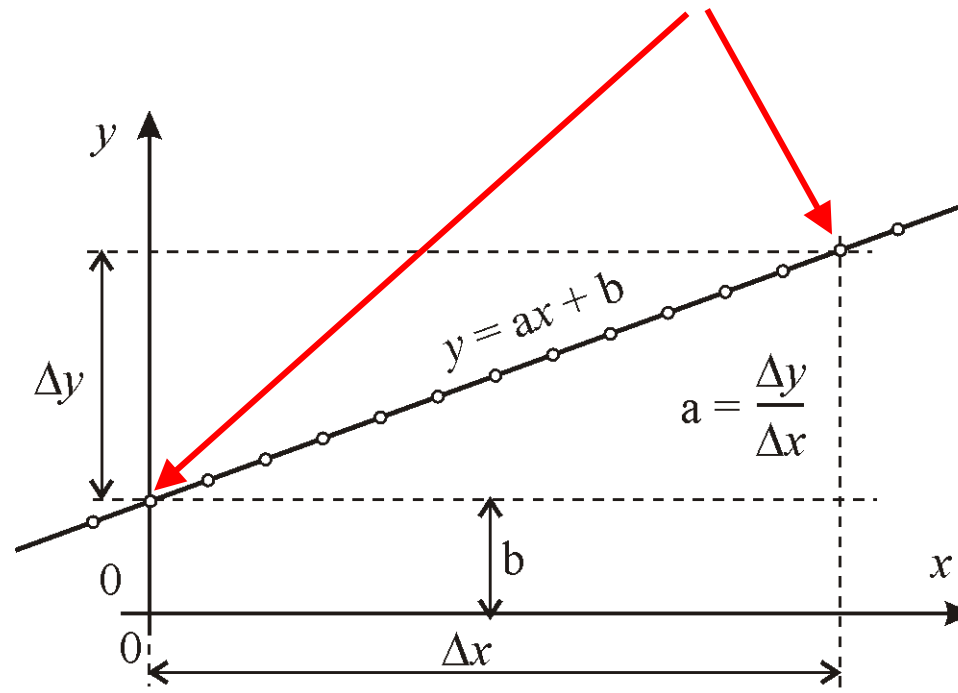
Opracowywanie wyników metodą najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów (*ang. LSM – Least Squares Method*) umożliwia analityczne wyznaczenie współczynników funkcji aproksymującej dane doświadczalne, zapewniając uzyskanie **minimum sumy kwadratów błędów** tej aproksymacji.

Zastosowanie: wyznaczamy doświadczalnie zależność funkcyjną pomiędzy dwoma wielkościami $y=f(x)$ wykonując serię n pomiarów współrzędnych punktów $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \dots (x_n, y_n)$ reprezentujących poszukiwaną zależność. W praktyce najczęstszym przypadkiem jest wyznaczanie współczynników linii prostej $y=ax+b$.

Aproksymacja linią prostą w warunkach idealnych

W warunkach idealnych (brak błędów) wszystkie wyniki leżą na linii prostej $y=ax+b$. Do wyznaczenia współczynników a i b tej linii prostej wystarczyłyby wybrane dowolnie **dwa punkty pomiarowe!**



Aproksymacja linią prostą w warunkach idealnych

W warunkach idealnych **dwa punkty pomiarowe** (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , umożliwiają ułożenie układu dwóch równań:

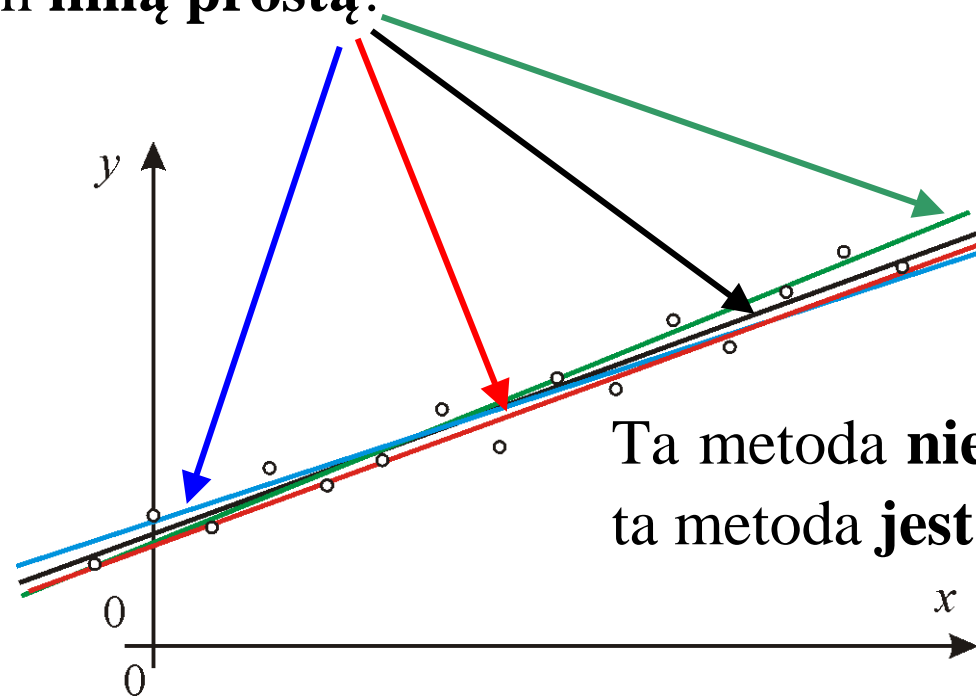
$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Odejmujemy równania od siebie i wyznaczamy a i następnie b . Rozwiązaniem układu dwóch równań są współczynniki a i b linii prostej aproksymującej punkty pomiarowe:

$$\begin{cases} a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = y_1 - ax_1 \end{cases}$$

Problemy w Metodzie naciągniętej nici

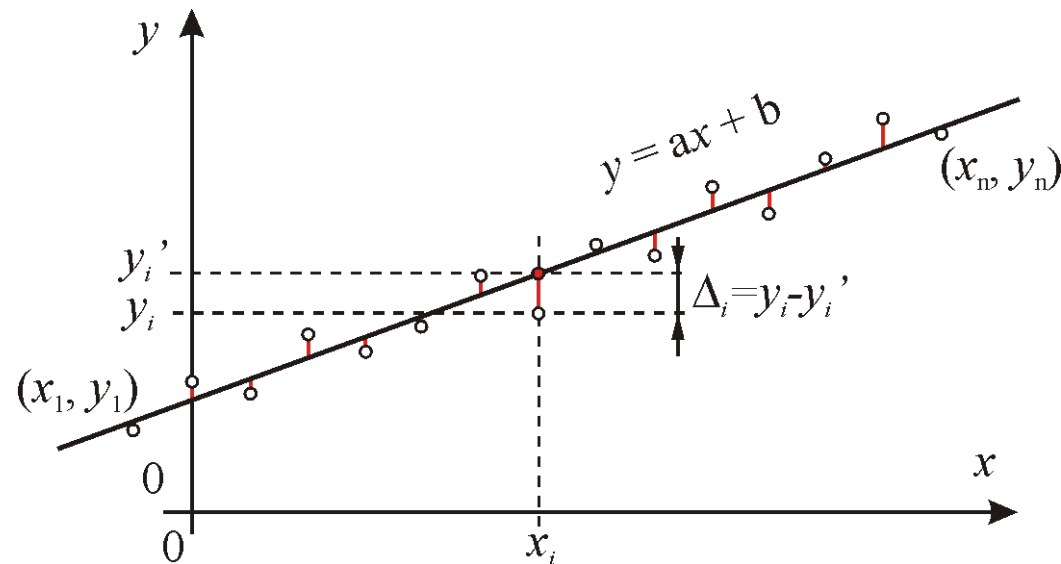
W metodzie naciągniętej nici problemem jest jednoznaczne wykreślenie najlepszej prostej aproksymującej, gdyż brak jest jednoznacznego kryterium. Każdy eksperymentator wykreśli z tych samych danych **inną prostą!**



Ta metoda **nie jest obiektywna**,
ta metoda **jest subiektywna!**

Zasada metody najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów jest **jednoznaczna**. Na podstawie n punktów pomiarowych $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \dots (x_n, y_n)$ umożliwia wyznaczenie współczynników a i b funkcji $y=ax+b$ aproksymującej dane doświadczalne, zapewniając uzyskanie **minimum sumy kwadratów błędów** Δ_i tej aproksymacji.



Obliczenia metodą najmniejszych kwadratów

Błąd aproksymacji i -tym punkcie (x_i, y_i) wynosi:

$$\Delta_i = y_i - y'_i = y_i - (ax_i + b)$$

Obliczamy sumę kwadratów błędów Δ_i dla wszystkich n punktów:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Otrzymaliśmy **funkcję dwóch zmiennych a, b** ze współczynnikami (x_i, y_i) będącymi wynikami pomiarów. Szukamy **a** i **b** dla których występuje **minimum** tej funkcji:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \min$$

Obliczenia metodą najmniejszych kwadratów

Wyznaczanie minimum funkcji polega na przyrównaniu do zera pochodnych cząstkowych względem a i b :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{\partial b} = 0 \end{array} \right.$$

Otrzymany układ dwóch równań należy rozwiązać względem a i b .

Końcowe wzory dla metody najmniejszych kwadratów

Po przekształceniach otrzymujemy wzory na obliczenie a i b :

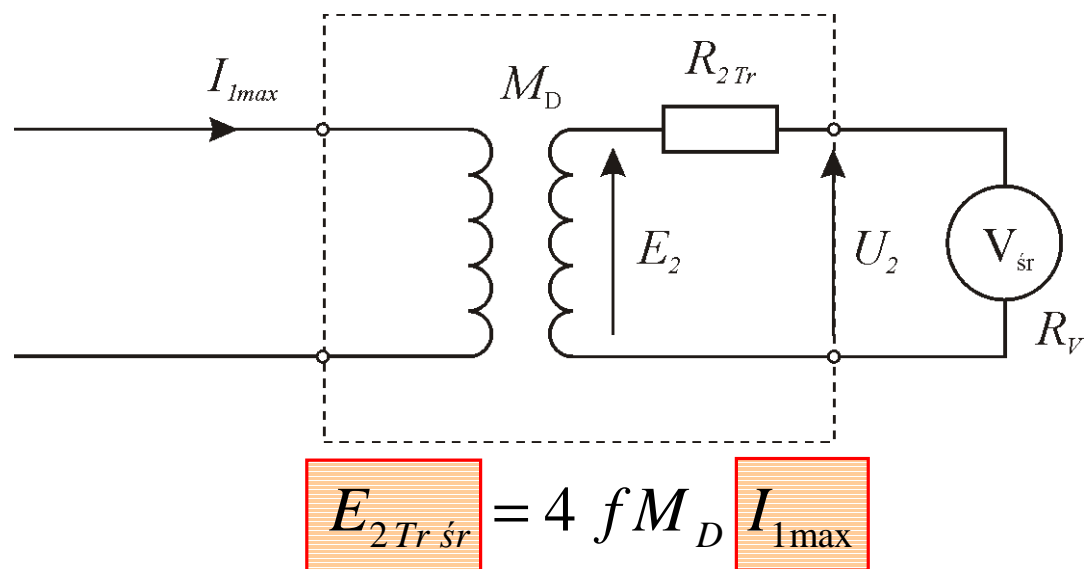
$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Wniosek: współczynniki a i b są jednoznacznie określone przez współrzędne n punktów pomiarowych $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \dots (x_n, y_n)$.

Przykładowe zastosowanie metody najmniejszych kwadratów

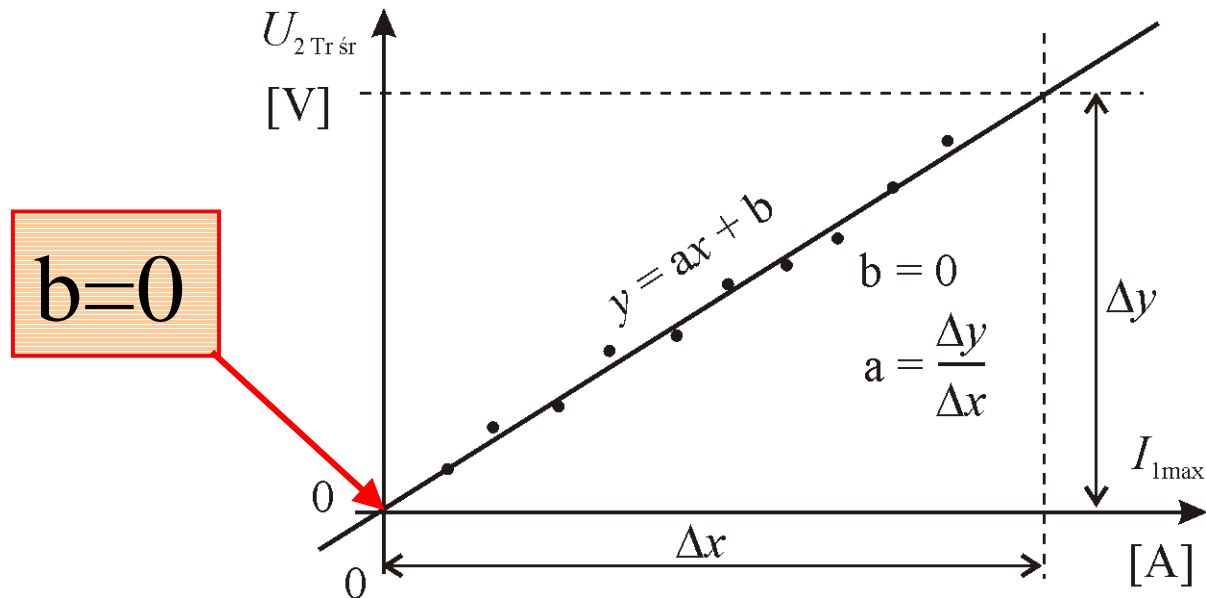
Skalowanie transformatora powietrznego do pomiaru wartości maksymalnej prądu magnesującego I_{1max} w aparacie Epsteina.



Transformator powietrzny jest przetwornikiem maksymalnej wartości prądu I_{1max} na wartość średnią napięcia indukowanego $E_{2\acute{s}r}$.

Wyznaczanie charakterystyki transformatora powietrznego

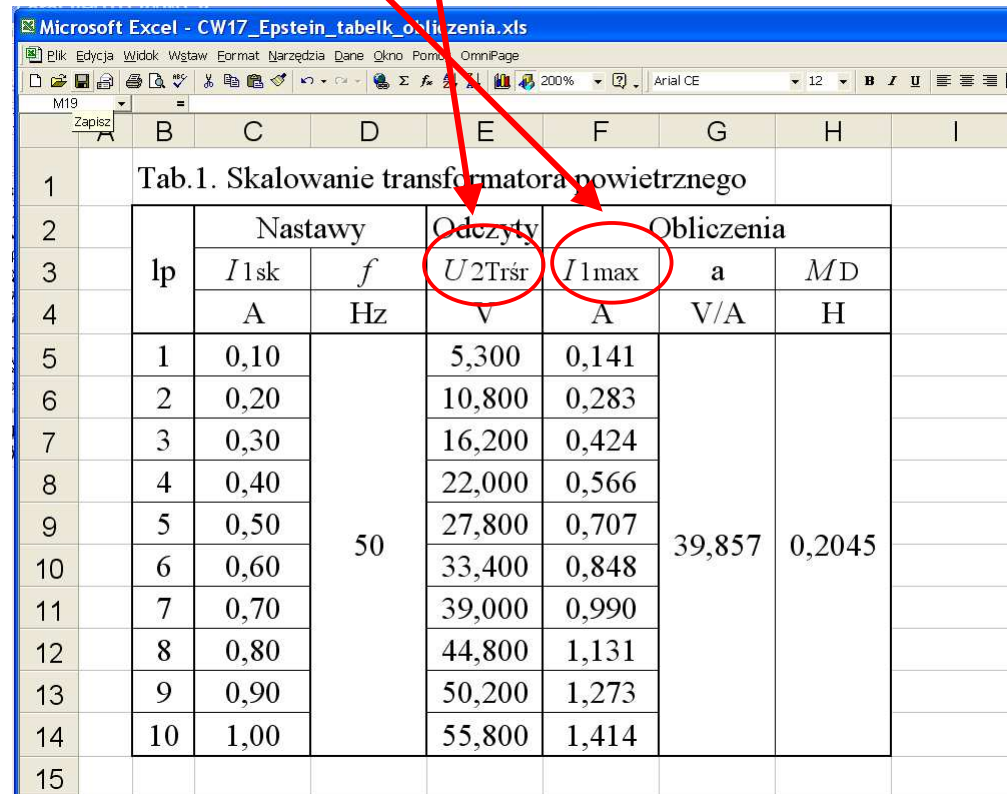
Zadanie polega na wykonaniu serii pomiarów $I_{1\max}$ i $E_{2\acute{s}r}$, wyznaczeniu liniowej charakterystyki przetwarzania transformatora powietrznego i obliczeniu jego indukcyjności wzajemnej M_D .



$$M_D = \frac{U_{2\acute{s}r}}{I_{1\max}} \cdot \frac{1}{4f} \cdot \left(1 + \frac{R_{2Tr}}{R_V}\right) = a \cdot \frac{1}{4f} \cdot \left(1 + \frac{R_{2Tr}}{R_V}\right)$$

Excel -wyznaczanie charakterystyki

Wyniki serii pomiarów $I_{1\max}$ i $U_{2\text{śr}}$ wprowadzamy do arkusza Excel i generujemy wykres.



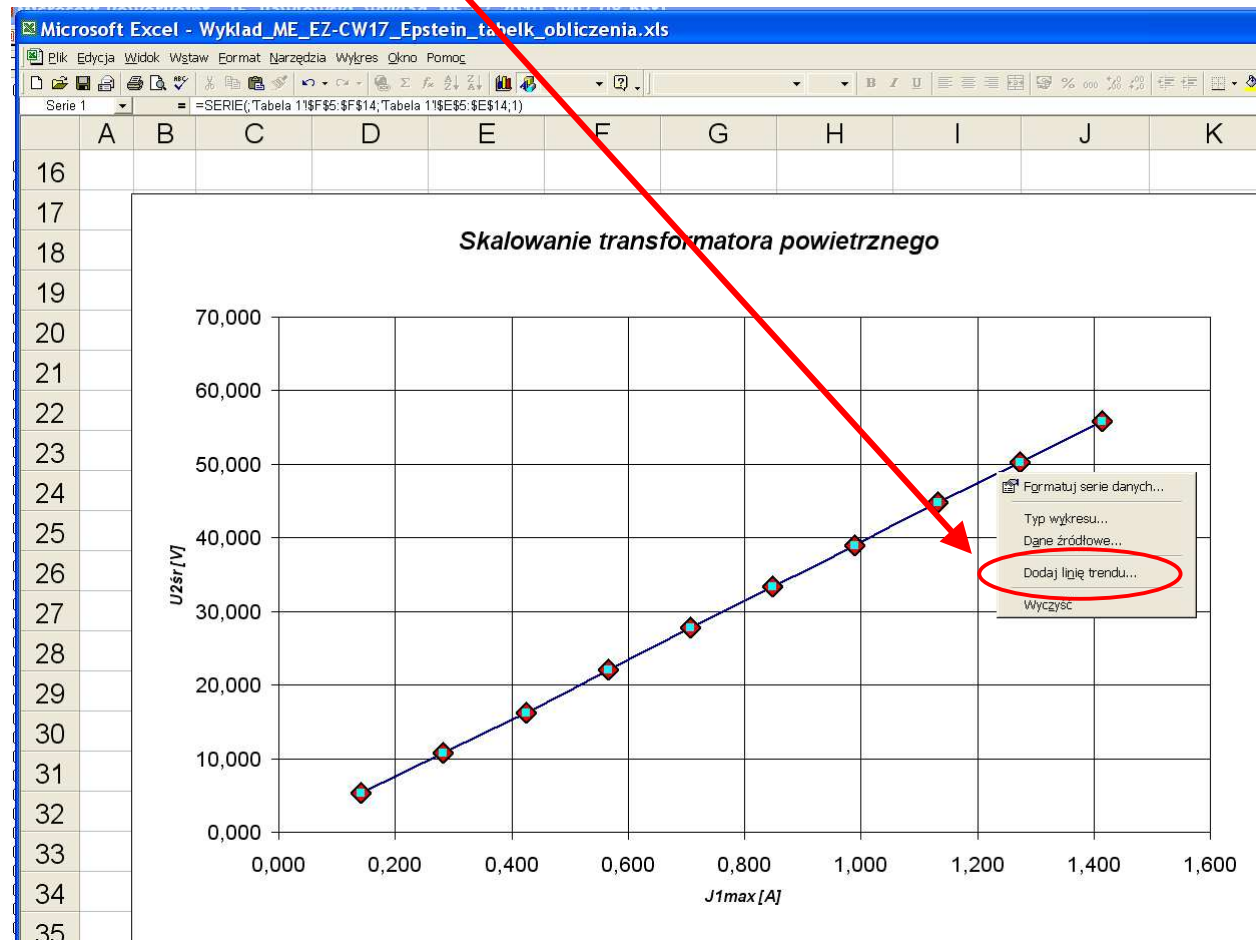
Microsoft Excel - CW17_Epstein_tabelk_obliczenia.xls

Tab.1. Skalowanie transformatora powietrznego

lp	Nastawy		Odczyty	Obliczenia		
	I_{1sk}	f	$U_{2Trśr}$	$I_{1\max}$	a	MD
	A	Hz	V	A	V/A	H
1	0,10	50	5,300	0,141	39,857	0,2045
2	0,20		10,800	0,283		
3	0,30		16,200	0,424		
4	0,40		22,000	0,566		
5	0,50		27,800	0,707		
6	0,60		33,400	0,848		
7	0,70		39,000	0,990		
8	0,80		44,800	1,131		
9	0,90		50,200	1,273		
10	1,00		55,800	1,414		

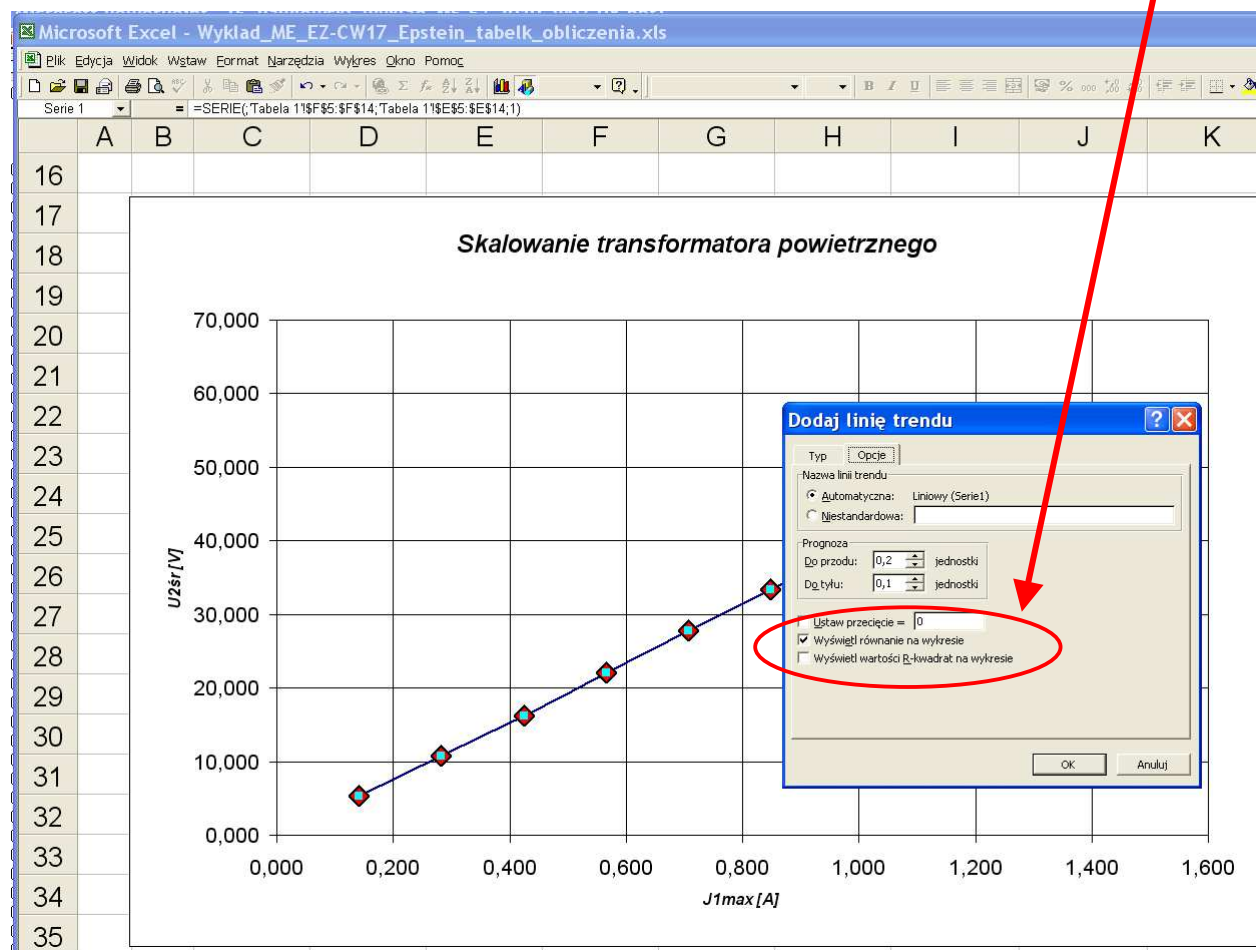
Excel –linia trendu

Do wykresu dodajemy linię trendu, wybieramy typ trendu liniowego.



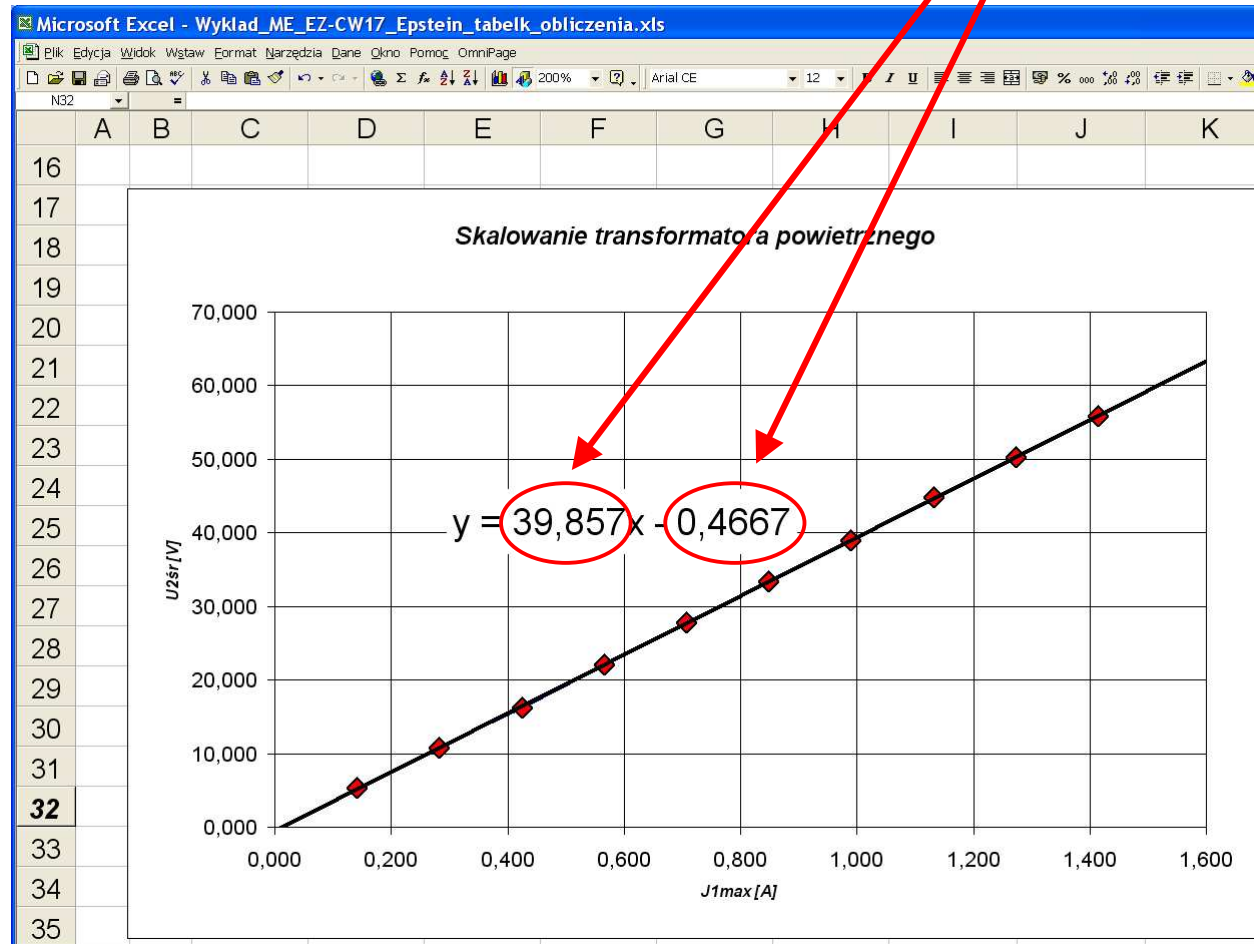
Excel – linia trendu

Formatujemy linię trendu, zaznaczamy wyświetlanie równania.



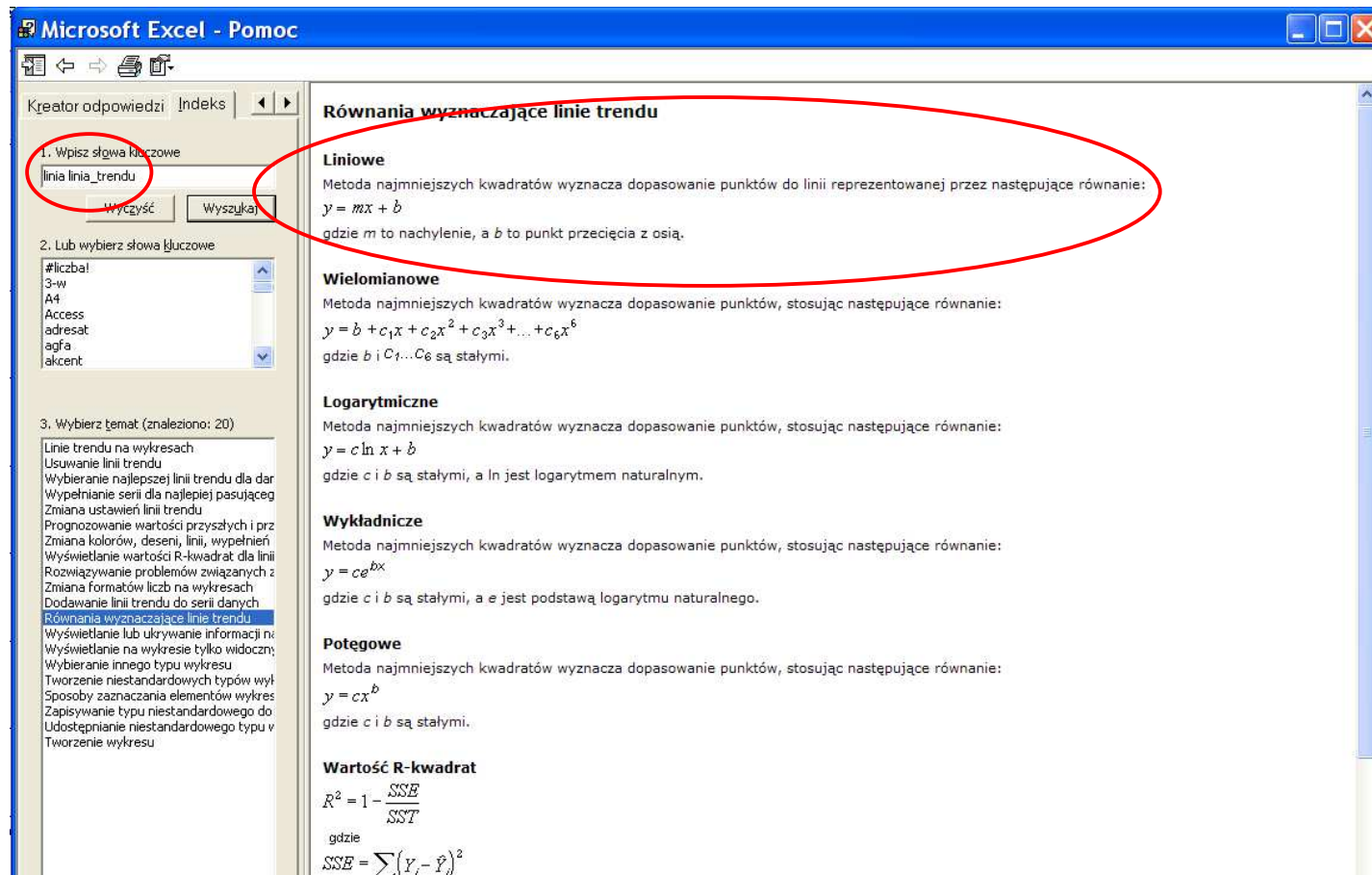
Excel – linia trendu

Z równania linii trendu odczytujemy współczynniki prostej aproksymującej.



Excel –Pomoc do hasła linia trendu

Z równania linii trendu odczytujemy współczynniki prostej aproksymującej.



Metoda najmniejszych kwadratów dla innych funkcji

Problem: jak zastosować metodę najmniejszych kwadratów do charakterystyk $y=f(x)$ o kształcie innym niż linia prosta ?

Możliwe rozwiązanie: przekształcić zależność $y=f(x)$ tak, aby sprowadzić ją do równania linii prostej.

Przykład: rozdział strat w żelazie metodą częstotliwościową za pomocą aparatu Epsteina.

Przykład - rozdział strat metodą częstotliwościową

Straty w żelazie P_{Fe} są sumą strat histerezowych P_h i strat wiropądowych P_w . Metoda częstotliwościowa rozdziału strat wykorzystuje fakt, że straty histerezowe P_h są wprost proporcjonalne do częstotliwości f , a straty wiropądowe P_w zależą od kwadratu częstotliwości f^2 :

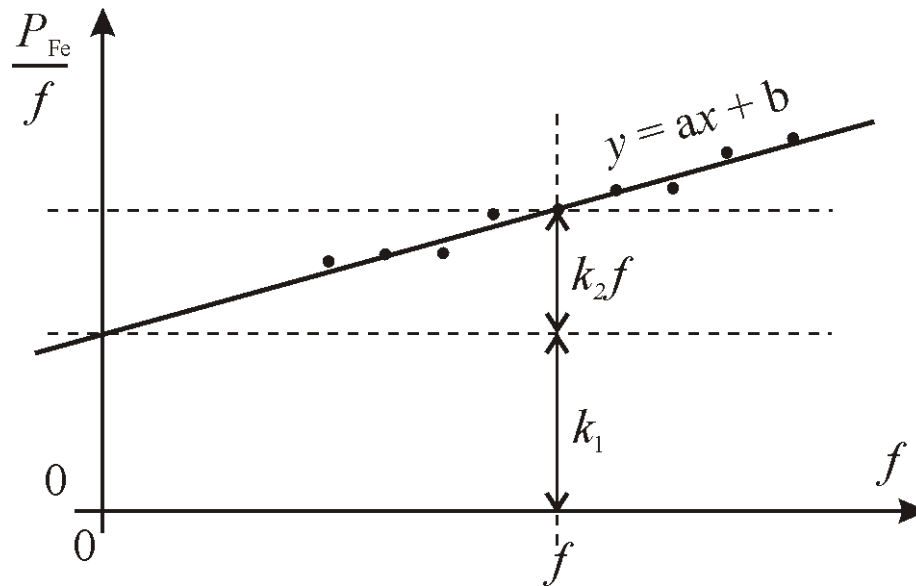
$$P_{Fe} = P_h + P_w = k_1 f + k_2 f^2$$

Równie powyższe **dzielimy obustronnie** przez częstotliwość f , otrzymujemy liniową funkcję częstotliwości:

$$\frac{P_{Fe}}{f} = k_1 + k_2 f$$

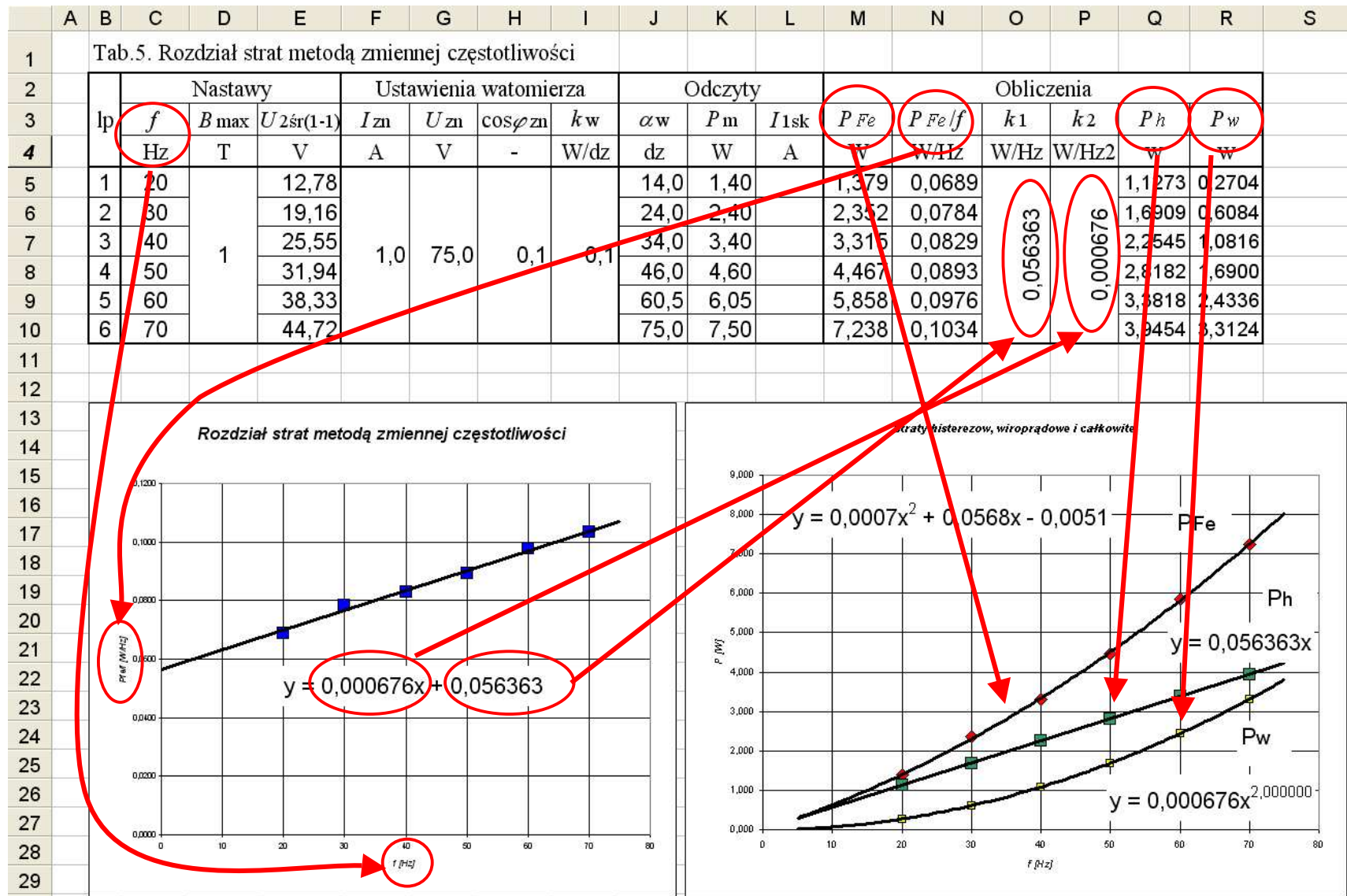
Przykład - rozdział strat metodą częstotliwościową c.d.

Sporządzamy wykres P_{Fe} / f w funkcji częstotliwości f i następnie aproksymujemy go linią prostą metodą najmniejszych kwadratów. Odczytujemy współczynniki $k_1=b$, $k_2=a$.



Obliczamy straty: $P_h = k_1 f$ $P_w = k_2 f \cdot f$

Excel - rozdział strat metodą częstotliwościową



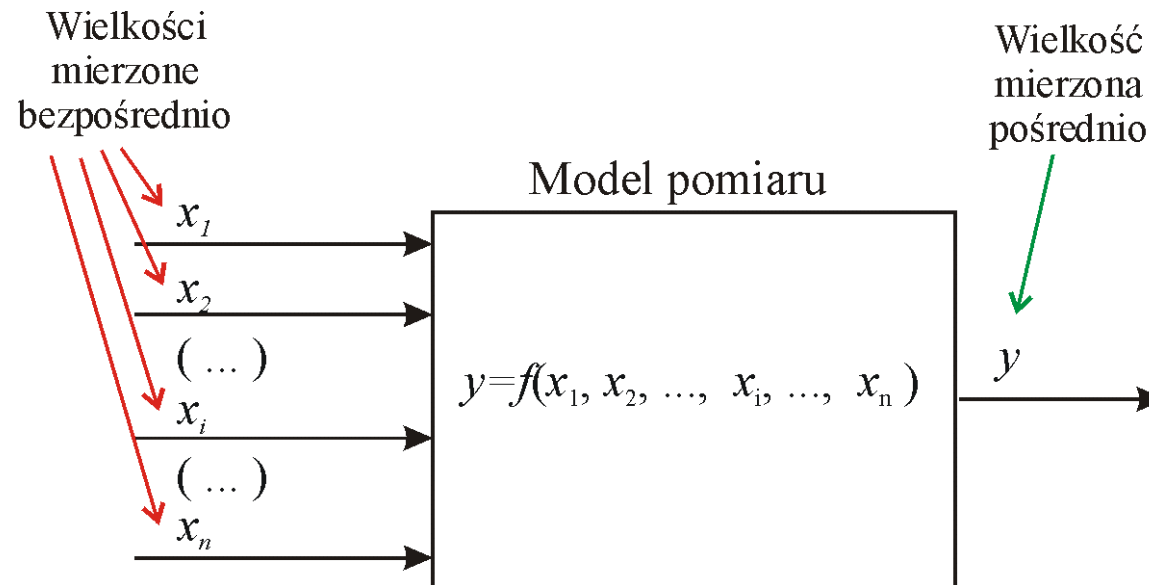
Pomiary pośrednie – równanie pomiaru

Pomiar pośredni polega na obliczeniu wartości wielkości mierzonej y na podstawie wyznaczonych w pomiarach bezpośrednich wartości wielkości $x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_i \dots x_n)$$

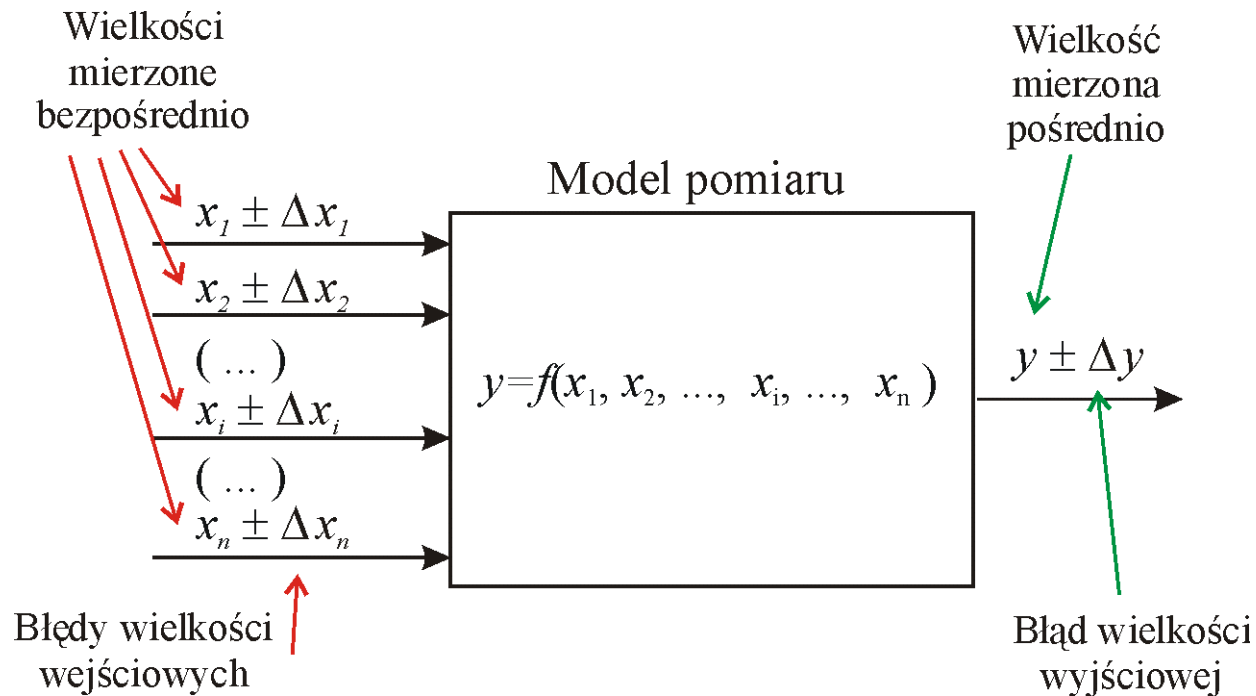
Równanie powyższe nazywamy **równaniem pomiaru**, a funkcję f nazywamy **funkcją pomiarową**. Równanie pomiaru jest matematycznym **modelem pomiaru**.

Pomiary pośrednie – model pomiaru



Problem: jak błędy wielkości x_i mierzonych bezpośrednio przenoszą się na wielkość y mierzoną pośrednio ?

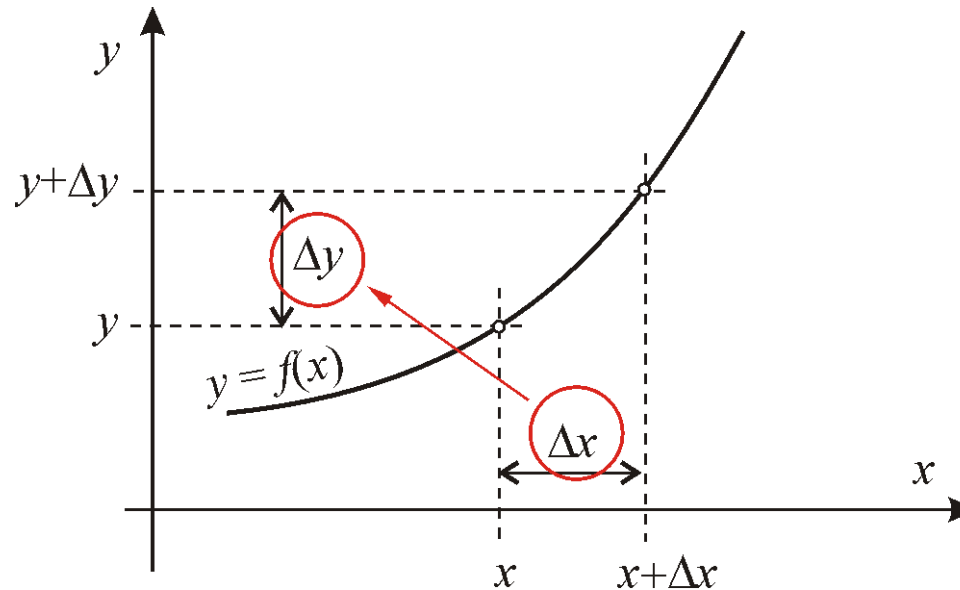
Pomiary pośrednie – błędy



Wniosek: należy błędy Δx_i wielkości mierzonych bezpośrednio przeliczyć na błąd Δy wielkości mierzonej pośrednio.

Błędy w pomiarach pośrednich

Przykład dla funkcji jednej zmiennej



$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

W praktyce błędy w pomiarach pośrednich wyznaczamy metodą wykorzystującą pojęcie **różniczki zupełnej funkcji.**

Błędy w pomiarach pośrednich – podstawy matematyczne

Różniczką zupełną funkcji wielu zmiennych $y=f(x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n)$ nazywamy **sumę postaci**:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

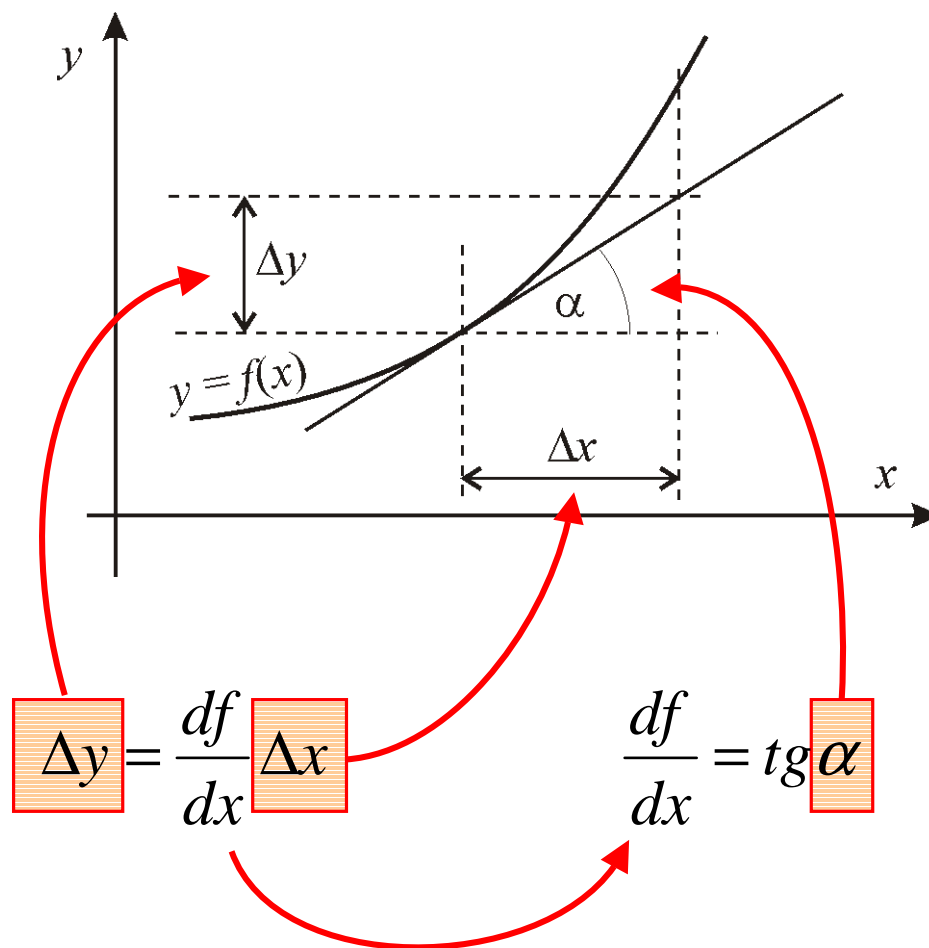
Interpretacja geometryczna dla funkcji jednej zmiennej $y=f(x)$:

$$\Delta y = \frac{df}{dx} \Delta x \quad , \text{ przy czym:}$$

$$\frac{df}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

gdzie kąt α jest nachyleniem stycznej do funkcji $y=f(x)$

Podstawy matematyczne – różniczka zupełna



Błędy systematyczne w pomiarach pośrednich

Błąd systematyczny w pomiarach pośrednich liczymy metodą różniczki zupełnej na podstawie błędów systematycznych wielkości zmierzonych bezpośrednio, **z uwzględnieniem znaków pochodnej i znaków błędów**:

$$\Delta_S y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_S x_i \quad \text{gdzie:}$$

$\Delta_S y$ jest błędem systematycznym w pomiarze pośrednim,

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji pomiarowej,

$\Delta_S x_i$ są błędami systematycznymi w pomiarach bezpośrednich.

Błędy graniczne w pomiarach pośrednich

Błąd graniczny w pomiarach pośrednich liczymy metodą różniczki zupełnej na podstawie błędów granicznych wielkości zmierzonych bezpośrednio, **bez uwzględniania znaków** (sumując moduły – przewidujemy najbardziej niekorzystny przypadek):

$$\Delta_{gr} y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{gr} x_i \right| \quad \text{gdzie:}$$

$\Delta_{gr} y$ jest błędem granicznym w pomiarze pośrednim,

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji pomiarowej,

$\Delta_{gr} x_i$ są błędami granicznymi w pomiarach bezpośrednich.

Błędy graniczne w pomiarach pośrednich - przykład

Obliczmy błąd graniczny w pomiarze pośrednim energii elektrycznej A wydzielonej na rezystancji R w czasie t .

Równanie pomiaru ma postać:

$$A = I^2 R t$$

Znaki mnożenia zbędne, tylko dla zwiększenia czytelności liczenia pochodnej

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial A}{\partial I} = 2I \cdot R t$$

$$\frac{\partial A}{\partial R} = 1 \cdot I^2 t$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 1 \cdot I^2 R$$

Błąd graniczny pomiaru energii A :

$$\Delta_{gr} A = \left| 2IRt \Delta_{gr} I \right| + \left| I^2 t \Delta_{gr} R \right| + \left| I^2 R \Delta_{gr} t \right|$$

Błędy graniczne względne w pomiarach pośrednich – przykład

Zazwyczaj ostatecznie liczymy błąd graniczny względny. Przy pomiarze pośrednim energii elektrycznej A wydzielonej na rezystancji R będzie miał on ma postać:

$$\delta_{gr} A = \frac{\Delta_{gr} A}{A} = \frac{\Delta_{gr} A}{I^2 R t}$$

Po przekształceniach otrzymamy:

$$\delta_{gr} A = \left| 2 \frac{\Delta_{gr} I}{I} \right| + \left| \frac{\Delta_{gr} R}{R} \right| + \left| \frac{\Delta_{gr} t}{t} \right|$$

Czyli:

$$\delta_{gr} A = \left| 2\delta_{gr} I \right| + \left| \delta_{gr} R \right| + \left| \delta_{gr} t \right|$$

Błędy graniczne względne w pomiarach pośrednich – ogólnie

Uogólniając, można wykazać, że jeśli równanie pomiaru jest w postaci **iloczynu potęg wielkości mierzonych** (bardzo częsty przypadek) :

$$y = k x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$$

to

błąd graniczny pomiaru pośredniego można policzyć jako:

$$\delta_{gr} y = |a_1 \delta_{gr} x_1| + |a_2 \delta_{gr} x_2| + |a_3 \delta_{gr} x_3| + \dots + |a_n \delta_{gr} x_n|$$

Uwaga: wykładniki potęg a_1, a_2, \dots, a_n mogą być dowolne: dodatnie, ujemne, całkowite, ułamkowe ...

Przykład c.d. – pomiar energii A inaczej

Przy pomiarze pośrednim energii elektrycznej A wydzielonej na rezystancji R w czasie t równanie pomiaru ma postać:

$$A = 1 \cdot I^2 R^1 t^1$$

A więc możemy od razu zapisać wzór końcowy na względny błąd pomiaru pośredniego:

$$\delta_{gr} A = |2 \cdot \delta_{gr} I| + |1 \cdot \delta_{gr} R| + |1 \cdot \delta_{gr} t|$$

czyli:
$$\delta_{gr} A = |2\delta_{gr} I| + |\delta_{gr} R| + |\delta_{gr} t|$$

Błędy graniczne w pomiarach pośrednich - inaczej

Sumując moduły błędów, bez uwzględniania znaków, przewidujemy najbardziej niekorzystny przypadek i otrzymujemy zawyżone wartości. Bardziej realne wyniki otrzymujemy stosując **sumowanie geometryczne** (pierwiastek z sumy kwadratów):

$$\Delta_{gr} y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_{gr} x_i \right)^2}$$

Wyznaczanie niepewności w pomiarach pośrednich

Przy pomiarze pośrednim wielkości y wyznaczonej na podstawie wartości wielkości $x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n$ otrzymanych w pomiarach bezpośrednich, według równania pomiaru:

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_i \dots x_n)$$

obliczamy niepewność pomiaru modyfikując wyznaczenie niepewności łącznej (całkowitej) u_c **w kroku trzecim.**


Wyznaczanie niepewności w 5 krokach - przypomnienie

Procedura wyznaczania niepewności zawiera się w 5 krokach:

1. wyznaczanie niepewności u_i metodą typu A ,
2. wyznaczanie niepewności u_j metodą typu B ,
- 3. wyznaczanie niepewności złożonej (łącznej) u_c ,**
4. wyznaczanie niepewności rozszerzonej U ,
5. zaokrąglanie wyników obliczeń i podawanie wyniku końcowego.

Krok 3 - wyznaczanie niepewności złożonej u_c

W kroku trzecim wyznaczana jest niepewność złożona (łączna, całkowita) u_c według metody „pierwiastek z sumy kwadratów” :


$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

jeśli wielkości x_i nie są ze sobą skorelowane (są od siebie niezależne).

Jeśli wielkości x_i są ze sobą skorelowane to należy w sumowaniu uwzględnić odpowiednie **kowariancje**.

Krok 3 – uwzględnienie kowariancji

Jeśli wielkości x_i są ze sobą skorelowane to należy w sumowaniu uwzględnić odpowiednie **kowariancje** $u(x_i, x_j)$:

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

Kowariancję $u(x_i, x_j)$ liczymy według wzoru:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)$$

Podsumowanie

1. Statystyczna obróbka serii wyników umożliwia eliminację błędów grubych
2. Aproksymacja danych eksperymentalnych metodą naciągniętej nici nie jest jednoznaczna
3. Jednoznaczną aproksymację zapewnia metoda najmniejszych kwadratów
4. Najczęściej stosujemy metodę najmniejszych kwadratów do aproksymacji linią prostą
5. Metodę najmniejszych kwadratów wykorzystuje program Excel do wyznaczania linii trendu
6. Błędy i niepewności w pomiarach pośrednich wyznacza się metodą różniczki zupełnej na podstawie równania pomiaru

